Universidad de Cádiz

# Análisis de una Innovación Docente para la Enseñanza del Límite Funcional en Bachillerato


## Andrés Pérez Montilla

**Tutor: Prof. Dr. José María Cardeñoso Domingo**


Trabajo Fin de Máster

Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Especialidad de Matemáticas

Facultad de Ciencias de la Educación, Puerto Real, febrero 2018

# Agradecimientos

En primer lugar, quisiera agradecer a todos mis profesores del MAES la dedicación y pasión que han demostrado durante todos estos meses, ayudándome a descubrir el precioso mundo de la educación. En especial a Juan, que ha estado dándonos un respiro en momentos de desasosiego o ayudándonos con las temidas UDIs. Espero me perdonéis el que alguna que otra vez no os haya comprendido.

A mis compañeros de clase por las mil y una batallas libradas, entre oleadas de trabajos y fechas ajustadas, los interminables cabildos de WhatsApp y los momentos de alegría, que también han sido muchos.

A mis alumnos del Practicum porque han sido los mejores profesores que he tenido en mi vida. Me habéis enseñado que ni con poca ni mucha azúcar, os tragáis cualquier píldora que os dan. Espero que guardéis de mí un grato recuerdo como yo de vosotros.

Por otro lado, agradecer a Don Manuel Quijano, director del centro La Salle Buen Pastor de Jerez de la Frontera y profesor de matemáticas en 2º de Bachillerato, su generosidad, confianza y amabilidad.

Para finalizar, quisiera dar mi más sentida gratitud a Chema mi tutor, por las interminables horas de lectura, tus consejos y la ayuda desinteresada para que este TFM sea una realidad. De verdad que pocos profesores son tan comprometidos como tú, sobre todo fuera del aula o las horas de tutoría. Ojalá me contagies tus ganas para seguir durante muchos años más en esta profesión, porque, aunque me haya costado o haya veces que me haya desesperado, lo que por encima de todo valoro es que me hayas enseñado a comprenderte y seguro que estarás de acuerdo conmigo en que ¡eso sí que es transformar a una persona!

# ÍNDICE DE CONTENIDOS

# “Análisis de una Innovación Docente para la Enseñanza del Límite Funcional en Bachillerato”


Resumen

El presente trabajo se centra en la didáctica de los límites de funciones puntuales para 2º de Bachillerato. La monografía se divide en cuatro capítulos. El primero de ellos expone los fundamentos básicos del pensamiento matemático avanzado y un modelo cognitivo de aprendizaje: la teoría de las imágenes conceptuales. Más adelante se incluyen algunos ejemplos de esquemas intuitivos y una reflexión sobre la influencia de los registros de representación semióticos en la evolución conceptual.

El segundo capítulo desarrolla los elementos de nuestra investigación así como la planificación didáctica implementada en el aula. El objetivo es medir la influencia de dicha secuencia en las imágenes conceptuales de los alumnos, además de analizar errores con el que apoyar las tesis expuestas en la fundamentación teórica.

El capítulo tercero incluye un análisis exploratorio de las respuestas obtenidas con gran cantidad de imágenes, diálogos y fragmentos del diario de clase que ayudarán aún más si cabe a obtener información útil con el que establecer relaciones de causa y efecto.

Para finalizar expondremos las conclusiones extraídas durante la experiencia y algunas recomendaciones futuras. En los anexos se incluye material empleado en las clases entre otras cosas de interés.

# “Analysis of a Teaching Innovation for the Teaching of the Functional Limit in Baccalaureate”


Abstract

The present academic work focuses on the didactics of the functional limits for 2nd year of Baccalaureate. The monograph is divided into four chapters. The first one exposes the basis of advanced mathematical thinking and a cognitive model of learning: the concept images theory. Below are included some examples of intuitive schemes and a reflection about the influence of semiotic representation registers on conceptual evolution.

The second chapter develops the elements of our research as well as the didactic planning of the instruction carried out with a group of students from 2nd year of the Baccalaureate. Two questionnaires were carried out, one before and others afterwards in order to measure the influence of the didactic sequence in their ideas analyze mistakes and conceptual schemes with which to argue the theses presented in the theoretical foundation.

The third chapter includes an exploratory analysis of the answers with many photos, dialogues and pieces of the class journal that will help even more if it is possible to obtain useful information with which to establish cause and effect links.

To conclude, we present the conclusions drawn during the experience and some recommendations. In the annexes material used in the lessons is include among other things of interest.

## Introducción

La introducción del cálculo infinitesimal en la enseñanza Secundaria ha suscitado un interés notable en gran cantidad de investigadores durante los últimos años. La primera reminiscencia la encontramos en el *Psychology of Mathematics Education* en el año 1985, del cual surgió un grupo de trabajo formado por importantes personalidades dirigidas por Douady, los cuales se interesaron en el estudio y la naturaleza del llamado "Pensamiento Matemático Avanzado". Su objetivo era investigar y entender los procesos cognitivos, los modelos de enseñanza y todos aquellos temas relacionados con el cálculo infinitesimal. Desde aquel momento, una nueva línea de investigación se encargó de intentar explicar cómo los estudiantes eran capaces de aprender aquellos conceptos y qué mecanismos mentales se ponían en funcionamiento mientras se manipulaban derivadas, límites o integrales.

Otro hito importante de la historia de la didáctica del análisis fue el congreso ICME 7 celebrado en Quebec (1992) en el cual se formularon los principales retos y desafíos de la enseñanza del cálculo, como los que encontramos en (Azcárate y Camacho, 2003, p.142) *"¿cuáles son las dificultades comunes a todos los aspectos del Cálculo?, ¿cuáles son la razones de tales dificultades?, ¿qué problemas surgen a la hora de implementar secuencias de enseñanza?"*. Muchas quedaron sin respuesta y siguen investigándose hoy en día. No obstante, según estas autoras, algunas de las dificultades detectadas son: "*el concepto de límite y los procesos infinitos que intervienen en los conceptos básicos de derivada e integral, el estudio de las funciones, la notación de Leibniz, el infinito y el uso y selección de distintas representaciones*" (Azcárate y Camacho, 2003, p.142).

En España, las nociones de cálculo infinitesimal fueron introducidas en los Curricula en el año 1934 y desde los noventa, son numerosos los estudios llevados a cabo en el campo y abundante la bibliografía sobre el tema. La cuestión se encuentra en constante expansión y desde diferentes universidades se han llevado a cabo numerosas experiencias en la etapa Secundaria, Bachillerato y primeros cursos universitarios. Por citar algunos ejemplos, destacamos un trabajo de Blázquez y Ortega (2000), en el cual detallaban un experimento con alumnos de 4º ESO y Bachillerato de Matemáticas Sociales. En dicho estudio recopilaron gran cantidad de errores y dificultades que evidenciaban los estudiantes, siendo algunos de ellos:

1) El límite visto como aproximación inalcanzable, fruto del excesivo protagonismo de las funciones monótonas crecientes en los libros de texto.
2) El límite como el resultado de sustituir un valor x en una determinada fórmula.
3) Serias dificultades para considerar los límites en otros contextos.
4) Resolvían satisfactoriamente ejercicios rutinarios de cálculo, pero evidenciaban un nivel conceptual muy pobre.

Tradicionalmente, el modelo de enseñanza llevado a cabo en la escuela española se basaba en el estudio de las definiciones formales del análisis, y en el caso del límite, la definición de Weierstrass es sumamente compleja y acarrea gran cantidad de dificultades y obstáculos a los alumnos, debido a que no posee un carácter nada intuitivo. Con la LOGSE, el límite pasa a un plano donde debe primar la noción intuitiva, especialmente en las asignaturas de matemáticas sociales, por lo que los métodos de enseñanza deben procurar que el alumno encapsule ideas y nociones como la de tendencia y aproximación óptima, incluyendo para ello el registro numérico, las tablas de valores y las calculadoras. A pesar de este cambio, en los primeros cursos de cálculo de la universidad, los estudiantes evidenciaban y siguen mostrando serios problemas para superar la asignatura, puesto que los contenidos siguen teniendo ese tratamiento clásico carente de toda intuición. Ejemplo de ello, fue el trabajo de Juter (2006), en el cual, una muestra de jóvenes de primer curso de licenciatura se enfrentó a unos cuestionarios con tareas cada vez más complejas sobre límites de funciones. Los resultados reflejaron cómo el álgebra, y sobre todo la manipulación algebraica, provocaba confusiones y los llevaba a responder de forma incorrecta, o peor aún, los estudiantes resolvían correctamente las tareas pero sus razonamientos eran incongruentes, lo cual llevaba a la conclusión de que no eran conscientes de que sus conexiones entre conceptos estaban mal construidas.

Los estudios anteriores versan sobre procesos cognitivos, epistemología, análisis para la detección de errores y obstáculos asociados al concepto, así como modelos teóricos de aprendizaje. Otros investigadores han realizado aportaciones desde otros puntos de vista, como la didáctica –ofreciendo propuestas y materiales- véase por ejemplo, González, Lopetegui y Madan (2014) así como investigaciones sobre la influencia de los distintos registros de representación semiótica en la enseñanza-aprendizaje del análisis y del límite. Al respecto, Duval (1999) afirmaba que *"los objetos matemáticos no son objetos reales, como los de otras disciplinas",* por lo que "*recurrir a varios registros parece incluso una condición necesaria para no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones y para que se les pueda reconocer en cada una de ellas"* (citado en Londoño, Narro y Yatzil, 2005, p.92). El objetivo es conocer cómo la conversión y manipulación en diferentes modos de representar los límites puede ayudar a superar algunos obstáculos, o puede plantear otros nuevos, de manera que el discente vaya enriqueciendo su percepción del objeto.

Para terminar este primer análisis del estado de la cuestión, queremos concluir que son diversos los enfoques desde los que se está abordando la problématica de la enseñanza del límite y del análisis en general. Ejemplo de ello son los artículos, conferencias y congresos sobre el uso de programas de representación simbólica como Geogebra, creando nuevos contextos de aprendizaje no analizados hasta ahora. En este trabajo, nos hemos centrado en aquellos modelos que tratan de explicar los procesos cognitivos que llevan al discente a comprender el concepto de límite funcional, para luego, acompañado de otros estudios en didáctica o epistemología, poder diseñar una propuesta de intervención que sirva como base para el análisis de los resultados que hemos llevado a cabo en el centro escolar.

# ***1 Fundamentación Teórica***

En este capítulo describiremos los principales referentes teóricos que sustentan el trabajo de investigación. Se dividen en dos grandes bloques, el primero de ellos versa sobre el pensamiento matemático avanzado y en especial sobre el concepto de límite, mientras que el segundo, trata sobre cómo los distintos sistemas de representación pueden ayudar a favorecer los actos de comprensión y la evolución conceptual.

## 1.1 Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y Elemental (PME)

Entender cómo se piensa en matemáticas ha sido siempre una pregunta de difícil respuesta. Desde las distintas concepciones epistemológicas se han ofrecido varias versiones, todas ellas muy convincentes, y basadas en la propia actividad matemática del período objeto de estudio. Así pues, queremos hacer referencia a tres corrientes de pensamiento, las cuales darán pie a introducir el cuerpo teórico de esta sección.

Tal y como recoge Moreno (2007), tenemos por un lado la escuela formalista de Hilbert, en la que las matemáticas se concebían como sistemas formales basados en axiomas y teoremas. Para los formalistas, hacer matemáticas es manipular un conjunto de resultados y objetos con cierto fundamento lógico. En otro orden de cosas, encontramos a los logicistas con Frege como principal exponente, los cuales integraron las matemáticas como una parte de la lógica, es decir, esta disciplina daba cuerpo y sentido a la actividad de los matemáticos. Para terminar, tenemos a los intuicionistas Kronecker o Brouwer, escuela que afirmaba que los métodos constructivos y basados en la intuición son los que están detrás de la creación matemática. Es evidente que todo individuo tiene una concepción particular más o menos definida de lo que son las matemáticas y que además influye notablemente en la forma de enseñar de los docentes.

Dentro de las matemáticas existirán muchos y variados modos de pensamiento, pero en este trabajo nos centraremos en uno de ellos: el pensamiento matemático avanzado (PMA), por estar íntimamente relacionado con el límite funcional. En primer lugar, conviene distinguir entre lo que se considera pensamiento matemático elemental (PME) y PMA. En verdad hemos de decir, que tales distinciones no son claras, ya que dichos términos surgen como una necesidad de cuantificar el nivel de complejidad de los procesos y formas de razonar que las personas emplean cuando se enfrentan a cuestiones de tipo matemático. El PME está caracterizado mayormente por las ideas intuitivas, los procesos de clasificación y descripción –típicos de la escuela primaria-, mientras que como se cita en (Azcárate y Camacho, 2003, p. 136) en el PMA ocurre lo contrario. “*Cuando nos referimos a procesos cognitivos implicados* *en el pensamiento matemático avanzado, pensamos en una serie de procesos matemáticos entre los que destaca el proceso de abstracción que consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente."* Por lo que podríamos decir que la abstracción es uno de los principales procesos que caracterizan al PMA junto a otros como: "*representar, visualizar y generalizar, clasificar, conjeturar, inducir, analizar, sintetizar o formalizar"* (Ázcarate y Camacho, 2003, p.136). Para caracterizar algo mejor el PME y el PMA proponemos un cuadro tomado de (Garbin, 2015, p.141) y (citado de Calvo, 2001) el cual puede consultarse en el Anexo IV (p. 73).

A raíz de lo comentado anteriormente, el PME puede identificarse con el tipo de pensamiento que caracteriza a la actividad matemática de las primeras etapas de escolaridad –infantil y primaria- mientras que el PMA es propio de ambientes universitarios y científicos. Por consiguiente, nos planteamos importantes preguntas al respecto: ¿existe una transición entre ambos tipos de pensamiento? ¿Cómo se produce dicha transición? ¿A qué edad? Todos estos interrogantes suponen problemas de investigación de tipo psicológico, epistemológico y social, que no trataremos aquí, pero una lectura detenida del cuadro constata un cambio "*representado en ese traspasar el aprendizaje del profesor al alumno, el incremento en frecuencia de la relevancia dada a la demostración y definición, así como aquellos relacionados con la manera de abordar tareas de rutina, tratar información y resolver procesos matemáticos"* (Garbin, 2015, p.142) . El cuándo se empieza a transitar de un tipo de pensamiento a otro queda aún más difuminado, aunque ateniéndonos a los Curricula actuales, parece claro que el PME es propio de la escuela primaria, mientras que algunos tópicos característicos del PMA tales como la geometría euclídea o el cálculo, comienzan a tratarse a finales de la etapa Secundaria y en Bachillerato. Es por ello, que los docentes de dichos niveles tienen la difícil tarea de acompañar al estudiante durante esta transición, de modo que su modelo didáctico debe asegurar un cambio adecuado, gradual y significativo que dote al discente de aquellas habilidades necesarias para afrontar el paso sustancial que suponen los modos de pensamiento matemático característicos de los primeros cursos de universidad. De lo contrario, la brecha entre ambos mundos será tan abrupta que el alumno tendrá serios problemas y dificultades para afrontar esta nueva etapa en tan corto intervalo de tiempo.

Para concluir, queda evidenciado que en los últimos cursos de la ESO y en Bachillerato sobre todo, el alumno debe ir introduciéndose paulatinamente en situaciones que involucren procesos propios del PMA como son la abstracción, generalización, análisis y formalización, sirviendo como escenario algunos tópicos de su Curriculum y su materialización pasa por considerar algunas de las siguientes pautas:

*1)* Aumentar la carga teórica en las clases de matemáticas, así como proponer actividades que fomenten la competencia *"pensar matemáticamente"* (Niss,

2003) ya que ésta incluye capacidades como distinguir entre distintos tipos de enunciados –se podría proponer, por ejemplo, realización de demostraciones en clase, lecturas comprensivas acompañadas de cuestionarios acerca de teoremas, debatir definiciones en grupo y luego compararlas con la formal…-.

*2)* Disminuir el peso de las tareas rutinarias –no implica su desaparición- y proponer problemas significativos en el sentido de Monereo (2003), los cuales requieran el uso de competencias de Niss tales como "*modelizar*" y "*plantear y resolver problemas*". Sería interesante que en la evaluación, un porcentaje de las pruebas o la calificación estuviese referido a este apartado.

*3)* Reducir el nivel de contenidos co-sustanciales, es decir, no dar espacio y entidad en el aula a ciertos ítems que pueden deducirse de otros más generales, favoreciendo la integración y el nivel de complejidad del conocimiento a estudiar. Un ejemplo sería no tratar la semejanza o proporcionalidad geométrica como un ente separado de la propia proporcionalidad, el cálculo, como compartimentos estancos –límites, continuidad, derivabilidad e integración- sino darle un sentido argumental y un hilo natural, proponiendo problemas y actividades que requieran conocimientos de todos estos tópicos.

## 1.2 Imágenes Conceptuales y Definiciones Formales

Tal y como describe Dreyfus (1985), en los primeros cursos de matemáticas universitarias, usualmente el profesor posee un programa previamente diseñado con todos los contenidos a ver durante el trimestre. Sin entrar a considerar la adecuación de dichos tópicos o su número, lo que sí es cierto es que el docente suele organizarlos en un sistema de teoremas, proposiciones, definiciones y aplicaciones, que cubren los ítems establecidos. Serán presentados formalmente y totalmente pulidos –sin entrar en el desarrollo histórico o los obstáculos que los hicieron evolucionar-, en períodos de tiempo estrictamente planificados –aunque con cierta flexibilidad- y presuponiendo que al finalizar la instrucción y tras un estudio previo por parte del alumno, el conocimiento habrá sido asimilado y estará preparado para ser evaluado. Algo similar podría ocurrir en cursos como segundo de Bachillerato donde al final del mismo, los discentes tendrán que enfrentarse a la prueba de selectividad, por lo que deben dominar y controlar una serie de conocimientos relacionados con el álgebra, la geometría y el análisis. Esta manera de entender la enseñanza, en opinión de Dreyfus, posee algunas ventajas como que *"permite una estructura bien planteada del curso, así como dar unas garantías de que toda la materia queda cubierta"* (Dreyfus, 1985, p.27), pero a su vez, también plantea inconvenientes como la inflexibilidad en términos de adaptabilidad para el alumno. Esta concepción, tan propia de contextos superiores, y por ende del pensamiento matemático avanzado, parece encontrar su razón de ser en la creencia de que una matemática ausente de intuición y estrictamente formal, garantiza un aprendizaje aséptico en cuanto a concepciones erróneas, o al menos más liberado de errores y obstáculos. Nada más lejos de la realidad. Las evidencias obtenidas en alumnos de Secundaria y Bachillerato (De la Barrera, 2013) o la universidad (Juter, 2006) sobre uno de los ítems característicos del PMA, como son los límites, sirven como escenario para preguntarnos sobre los procesos cognitivos que están detrás de este tipo de pensamiento y proponer modelos que logren explicarlos. En esta sección del trabajo abordaremos uno de ellos propuesto por Tall y Vinner en 1981.

Multitud de experiencias avalan (De la Barrera, 2013) y (Juter, 2006) que la matemática formal propia de la comunidad científica no necesariamente tiene por qué corresponder con la que poseen los estudiantes, más aún si los tópicos son complejos y requieren de poner en funcionamiento capacidades y habilidades tales como la generalización o la abstracción. Centrándonos en Bachillerato y Secundaria, Tall y Vinner, (1981) afirmaron que *"la mayoría de las veces usamos y reconocemos cierto concepto en un contexto pero lejos de entender su significado"* (Tall y Vinner, 1981, p.151). Por ello hemos de establecer una distinción previa entre concepto matemático y los procesos cognitivos por los cuales son concebidos. El modelo teórico que formularon se basa en lo que llaman la teoría de las imágenes conceptuales cuyos términos clave pasamos a definir –tomados de (Azcárate y Camacho, 2003, p.137)-:

1) *Definición de un concepto matemático:* secuencia de palabras o definición verbal del concepto, fruto de su evolución histórica. Se distinguen dos grupos, las *formales*, aceptadas por la comunidad científica, y *personales*, que son en una última instancia una interpretación, construcción o reconstrucción realizada por un individuo de una definición formal.
2) *Esquema conceptual (concept image):* estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados a dicho concepto; construidos a lo largo de los años a través de diferentes experiencias y en constante cambio y evolución ante nuevos estímulos.
3) *Imagen mental:* es el conjunto de todas las imágenes asociadas al concepto en su mente, incluyendo cualquier representación (gráfica, numérica, simbólica…) de dicho concepto.

Para complementar la información, recurriremos a un trabajo de Juter (2007), en el cual especifica una serie de espacios o contextos influyentes y condicionantes en la creación de dichas imágenes y esquemas. El primero de ellos es el *embodied world o mundo encarnado* que es donde "*los individuos usan sus percepciones del mundo real para realizar experimentos mentales con los que poder construir sus propias concepciones de los conceptos matemáticos"* (Juter, 2007, p.54). Un ejemplo muy simple y aplicado al tema de límites funcionales son las definiciones que los alumnos de Bachillerato y Secundaria manifiestan sobre la no rebasabilidad. En términos cotidianos el significado de límite se emplea para hacer referencia a una cantidad no superable –límite de velocidad- y ello lleva a los alumnos a asociar esta connotación a su imagen personal de límite, entendiendo que una función o sucesión –casi siempre trabajan con funciones o sucesiones monótonas- no puede superarlo, siendo totalmente falso y suponiendo un obstáculo en la comprensión. El segundo mundo es el *proceptual world* o *mundo proceptual* donde los individuos, partiendo de acciones procedimentales sobre concepciones mentales pertenecientes al ámbito anterior, llegan a encapsular conceptos asociándolos a símbolos. Por ejemplo, es común ver como los estudiantes relacionan el concepto de límite con imagen, ya que en sus tareas habituales han de resolver expresiones del tipo $\lim_{x \to a} f(x)$ y lo hacen la mayoría de las veces a través de $f(a)$, con el consiguiente error. El término *procept* (proceso + concepto) acuñado por Gray y Tall en 1994, hace referencia al *"objeto mental combinado que consiste en un proceso, un concepto producido por dicho proceso, y un símbolo que se puede usar para significar cualquiera de los dos o los dos"* (citado en Azcárate y Camacho, 2003, p.139). Cuando un estudiante se enfrenta a expresiones como $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$ hace una doble interpretación dependiendo de la tarea: una es la referida al objeto, es decir, el valor resultante, y otro el proceso de tendencia. Para finalizar con la exposición, tenemos el llamado *formal world* o *mundo formal* que corresponde con el ámbito matemático real, sus definiciones y teoremas.

Todos y cada uno de estos mundos condicionan y estimulan las imágenes conceptuales de los alumnos. La labor del profesor ha de estar encaminada a depurar y hacer evolucionar dichas concepciones a través de estímulos, es decir, proponer actividades y problemas que supongan poner en uso los significados que poseen y evidenciar inconsistencias e incoherencias para que, de esta manera, se vean en la necesidad de cambiarlas y evolucionar.

Una de las cuestiones más importantes que podemos hacernos es, ¿cómo podemos conocer los significados que configuran los esquemas mentales de los alumnos sobre un concepto matemático? Evidentemente no es posible leerles la mente, por lo que las únicas herramientas de las que dispone el profesor son las tareas y cuestionarios, en los que debe solicitar justificaciones y razonamientos para que de esa manera, perciba algunos flashes sobre lo que el estudiante piensa y cree. Una representación simbólica de lo que significa el esquema conceptual de un alumno, la encontramos en la *ilustración 1*. Conforme más compleja es la noción por aprender, como el caso de los límites, las derivadas o las integrales, más extensa será la red de conexiones. Mediante experiencias y contextos de trabajo irán evolucionando y cambiando constantemente. Una de las claves más importantes que descubrieron Tall y Vinner (1981), es que el cerebro puede fabricar gran cantidad de representaciones e imágenes de un mismo concepto sin tener consciencia de que pueden ser incoherentes entre sí. Dichos autores concretan que: "*los estímulos externos excitan algunas partes e inhiben otras*" (Tall y Vinner, 1981, p.152).

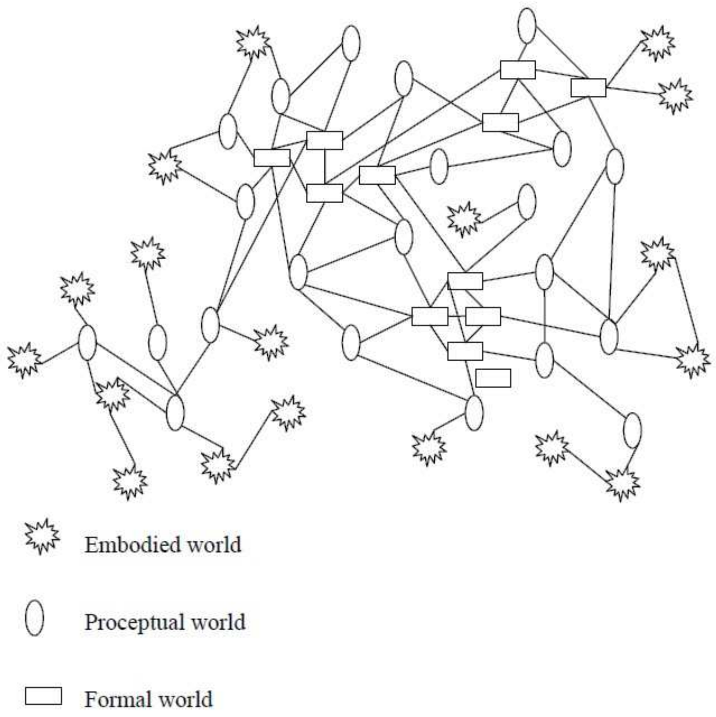



Ilustración 1: Representación de esquema conceptual. Imagen tomada de (Juter, 2007, p.55)

De esta manera, las tareas que les proponemos a los alumnos no necesariamente han de suponerles un problema para sus concepciones, puesto que las resuelven en términos económicos, es decir, utilizan aquellas zonas de su esquema que les permiten hacerlas satisfactoriamente sin mayor implicación. Esas zonas estimuladas son lo que Tall y Vinner (1981) denominaron *evoked concept image* o *imagen conceptual evocada*, entendidas como las partes de la imagen conceptual las cuales se activan en un determinado momento. Cuando una representación de un concepto es incorrecta, o incluye connotaciones inconsistentes al significado, estamos ante un *potential conflict factor o factor de conflicto potencial* que no es más que aquella porción de imagen del concepto la cual puede, o no, causar un conflicto con otra definición personal. Cuando ese factor potencial se evoca y se produce de manera evidente una incoherencia, entonces tenemos un *cognitive conflict factor*, traducido un *factor de conflicto cognitivo*. Para comprender mejor la terminología propondremos un ejemplo sencillo. Si le planteáramos a un estudiante de Secundaria o Bachillerato la siguiente tarea -tomada de (Tall y Vinner, 1981)-: se pide calcular el valor de $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right)$. Podríamos observar la siguiente situación:

- Es claro que la sucesión va añadiendo un 9 en cada posición decimal, su resultado sería 0.999…, es decir $0,\hat{9}$.
- La pregunta que podríamos plantearles es $¿\,0,\hat{9}=1?$

- Como la sucesión es estrictamente creciente –debido a que se trata de una suma- y el valor del límite no se alcanza –evoked concept image- concluirían que no. Incluso podrían decir que todos los términos (0.9, 0.99, 0.999…) son menores que uno por lo que es imposible.
- La idea de no alcanzabilidad y la idea de infinito potencial–que nunca se acaba- suponen potenciales factores conflictivos.
- Cuando le requerimos que pasen el $0,\hat{9}$ a fracción mediante un procedimiento que han aprendido en 3º ESO, concluyen que $0,\hat{9} = 1$ y por tanto, ahora sí, las ideas que pusieron en funcionamiento se han trasformado en un conflicto cognitivo.

El Curriculum actual de 2º Bachillerato y más especialmente las Directrices y Orientaciones generales para las Pruebas de Acceso y Admisión a la Universidad relegan el concepto de límite de función a una mera herramienta para el estudio de la continuidad y las asíntotas. Además, se les exige que conozcan las propiedades algebraicas elementales y las indeterminaciones (cero divido por cero, cero por infinito, infinito menos infinito, infinito dividido entre infinito) (Autores Varios, 2016).

Semejante marco condiciona notablemente al profesorado que, preocupado y presionado por los resultados de sus estudiantes en estas pruebas, planifican una enseñanza destinada a la consecución de estos ítems los cuales sólo requieren de un bagaje de cálculos más o menos amplio, pero que son conceptualmente pobres. La capacidad y dominio del concepto se vincula a la resolución de ejercicios rutinarios, en contextos similares (funciones racionales y a trozos) cuando ni por asomo, representan un porcentaje importante de lo que realmente encarna el límite. Esto provoca que las definiciones personales incoherentes pasen a la universidad sin ser detectadas, dificultando aún más el avance y aumentando la resistencia de las mismas –al estar usándose satisfactoriamente durante mucho tiempo- por lo que muy probablemente, en la etapa universitaria tengan una oleada de conflictos cognitivos –en el mejor de los casos, podrán madurar, en otros acabarán sus estudios superiores con los esquemas intactos-.

## 1.2.1 Algunos Modelos Intuitivos sobre Límite

Las imágenes conceptuales de los alumnos son ricas y variadas en significados y representaciones, por lo que, para detectarlas, resulta imprescindible conocerlas. A continuación, y tomando como fuentes consultadas los trabajos de (Colombano y Rodríguez, 2010) o (Fernández, 2011), enumeraremos algunas de las más usuales.

Colombano y Rodríguez, (2010) citaron el trabajo de Williams (1991), donde se enumeraron algunos de los modelos intuitivos de límite más comunes y que en palabras de las autoras "*tienen un campo de validez, en el cual al utilizarlo el* *estudiante resulta eficaz en la tarea, pero no todos son matemáticamente correctos*" (Colombano y Rodríguez, 2010, p.2). Son los siguientes:

1) *Modelo Dinámico-Teórico:* el límite es un valor que describe cómo se comporta una función cuando x tiende a un punto.
2) *Modelo Dinámico-Práctico:* se van insertando valores de x cada vez más cercanos al punto hasta que el valor del límite es alcanzado.
3) *Cota:* el valor del límite es un número más allá del cual la función no puede pasar.
4) *Formal:* corresponde con la definición formal de límite. El modelo se caracteriza por reconocer la arbitrariedad de la cercanía de las imágenes de la función respecto del límite restringiendo los valores de x a un entorno del punto, objeto de estudio. Suele ser poco común que los alumnos logren aprehender estas nociones y es considerado correcto matemáticamente.
5) *No alcanzable:* el límite es un valor al cual una función se aproxima pero nunca alcanza.
6) *Aproximación:* el valor del límite es aquél, tal que para cualquier aproximación del límite, se puede mejorar con la precisión que se desee.

Estos esquemas conceptuales no son excluyentes y un mismo alumno puede emplear varios de ellos en función de la tarea. No obstante, sintetizan ideas relacionadas con la tendencia, la aproximación y la rebasabilidad. Los términos aproximarse, tender y límite son especialmente comunes en las secuencias didácticas relacionadas con los límites y en una investigación llevada a cabo por Fernández (2011), se evidenció cómo los alumnos empleaban estos términos como sinónimos cuando no lo son. Los libros de texto e incluso los propios docentes, muchas veces los usan de forma incorrecta, sin especificar su significado matemático por mero desconocimiento, de modo que los alumnos recurren a sus interpretaciones cotidianas de estas palabras y las incorporan a sus imágenes del concepto. En nuestra secuencia didáctica hemos dedicado un espacio a aclarar esta cuestión. A continuación, expondremos las tres definiciones extraídas del análisis realizado de Blázquez y Ortega (2002) y Fernández (2011):

- *Aproximación:* una variable que toma sus valores en un conjunto numérico puede aproximarse a un cierto número, si los errores absolutos que se cometen de los valores de la variable son cada vez menores.
- *Tendencia:* una variable tiende a un número cuando los valores que toma son aproximaciones del número y además se aproximan más que cualquier otro valor, es decir, cualquier aproximación se puede mejorar con valores de la variable sin que llegue jamás a alcanzar dicho valor.

- *Límite:* una función f tiene a L como límite cuando x tiende a un punto a, si la función tiende a L pero con la opción de alcanzar dicho valor.

La inclusión de estos tres vocablos en nuestro estudio no es baladí ya que su uso indiscriminado es fuente de multitud de definiciones erróneas. Su explicación, difusión y uso correcto a la hora de justificar y exponer los contenidos, puede resultar de gran ayuda para evitar posibles obstáculos e ideas incoherentes en los alumnos.

## 1.3 Los Sistemas de Representación Semióticos y el Cambio Conceptual

*"Hoy en día se considera que no es posible estudiar los fenómenos relacionados con el conocimiento sin recurrir a la noción de representación. Se admite, además, que la pluralidad de sistemas semióticos permite diversificar las representaciones de un mismo objeto, y, de esta forma, amplía las capacidades cognitivas de los sujetos y, por tanto, sus representaciones mentales"* (Tamayo, 2006, p.41).

Los objetos matemáticos no son como el aparato digestivo o los planetas, que pueden ser observados y estudiados in situ, sino que son algo intangible y por ello necesitamos representaciones. Los profesores pueden privilegiar unas sobre otras. En la enseñanza universitaria el registro numérico y la resolución de límites por tablas de valores no se admite ya que supone una vía poco operativa y matemáticamente produce resultados alejados del rigor exigido en esta etapa, por lo que se prefieren representaciones algebraicas, mediante fórmulas, símbolos y operaciones lógicas. Éstas podrán ser más fáciles o complicadas de manipular, pero cuando un estudiante se enfrente a ellas, es probable que pueda observar ciertas propiedades del objeto y no otras, como la monotonía de la función o su curvatura –fácilmente de apreciar mediante la visualización de la gráfica y difícil a través del registro algebraico-.

Parece claro que hay una relación estrecha entre los registros de representación semióticos y el desarrollo de las imágenes conceptuales ya que son estas representaciones las que dan cuerpo a las mismas. Por ejemplo, si un alumno está acostumbrado a estudiar el límite puntual mediante la representación gráfica de la función, seguramente observe lo que ocurre en un entorno próximo al punto –sin considerar el propio punto- y vea hacia dónde se dirige el trazo tanto por la derecha como por la izquierda. Sin embargo, ante el mismo objeto pero representado a través de una expresión dependiente de x, sustituya el valor del punto y calcule la imagen. En el primer registro utilizó un argumento totalmente contrario al del segundo aunque la respuesta sea correcta en ambos casos. En esta sección intentaremos realizar un breve análisis sobre el papel de los registros de representación semióticos en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Basándonos en las aportaciones hechas por Duval (1999), entenderemos por representación semiótica lo siguiente:

- *Representación semiótica:* construcción que exterioriza aquellas representaciones mentales de un individuo a través de signos y mediante un sistema de expresión con sus propios constreñimientos de significancia y funcionamiento.

Dentro de las actividades, las cuales pueden leerse en (Londoño, Narro y Yatzil, 2005) que Duval (1999) propuso para explicar los procesos de construcción y transformación, destacan tres: la *formación* como el mecanismo de producir una representación identificable en un registro dado, seleccionando rasgos y datos en el contenido por representar y adaptándolas a las reglas de formación propias del registro. Por otro lado, el *tratamiento* que no es más que transformar la representación en cuestión en otra dentro del mismo registro, y para finalizar, la *conversión* que consiste en transformar la representación semiótica a un registro distinto. Para él, la adquisición de conocimiento lleva aparejados dos conceptos consustanciales, la *semiosis* y la *noesis*.

- *Semiosis*: aprehensión o producción de una representación semiótica.
- *Noesis:* aprehensión conceptual del concepto, la discriminación de una diferencia y la comprensión de una inferencia.

A partir de aquí estamos interesados en conocer cómo influye el trabajo con los distintos registros en las imágenes conceptuales sobre límite o cualquier otro concepto matemático característico del PMA. En la cita de Duval (1999) hecha por Tamayo (2006) podemos leer la siguiente afirmación:

*"La noesis no es independiente de la semiosis, [...] es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad de la noesis. En otras palabras, es el proceso de producción de representaciones externas el que hace posible comprender y ganar en claridad acerca de la representación mental interna en contra de una creencia muy generalizada en el ámbito educativo en el cual los profesores y estudiantes consideran que se tiene aprendido un concepto cuando se puede enunciar, cuando se puede representar externamente"* (Tamayo, 2006, p.42).

La afirmación anterior viene a explicar que los alumnos comprenden mejor los conceptos, y por tanto tienden a elaborar imágenes conceptuales de los mismos más coherentes, cuando captan los significados de dicho objeto en diferentes registros de representación y no al revés, los estudiantes emiten representaciones correctas o incorrectas en función de si entienden o no lo que quieren materializar. Esto a priori parece plausible, si tenemos en cuenta que no es raro ver como muchas veces utilizan correctamente los distintos registros para responder a una tarea, aunque evidencien no entender lo que hacen. Lo que sí está claro, es que es muy complicado encontrar una respuesta que resuelva el enigma sobre qué va primero, porque de lo que estamos seguros es que continuamente trabajamos con objetos matemáticos representados de diferentes formas, sin saber qué inconvenientes epistémicos, ontológicos o didácticos pueden acarrear, pero el caso es que los necesitamos.

Para finalizar esta parte de la teoría, queremos recoger algunas explicaciones plausibles acerca de la evolución conceptual, que en nuestro caso está muy vinculada con la transformación y evolución de los esquemas mentales.

Existe una opinión extendida de que los estudiantes poseen ideas acerca de las nociones que aprenden y que son relativamente coherentes –dependen de las partes del cerebro estimuladas- comunes y difíciles de cambiar (Tamayo, 2006). Estas ideas suelen provenir mayoritariamente del entorno cotidiano –embodied world-. Así pues, el cambio conceptual está muy ligado al contexto de aprendizaje. Si las tareas propuestas por el docente son fácilmente resolubles en un registro donde ciertas ideas encajan a la perfección con las normas del mismo, dicha representación servirá como recurso al alumno en todas aquellas situaciones que entienda similares y sus respuestas podrán ser incluso válidas. Por el contrario, si el significado del concepto a movilizar sigue siendo válido, pero no la representación, entonces optará por elegir otra dentro del mismo registro, o quizás en otro, pudiendo ocurrir que no lleve a cabo satisfactoriamente la conversión o transformación. A su vez pudiese suceder que encontrase una inconsistencia, si su idea inicial entra en conflicto con la representación que quiere emplear. Como afirma Caravita y Hallden (1994) (citado en Tamayo, 2006, p.46): *“las dificultades de los estudiantes para la comprensión de los conceptos científicos pueden deberse, no a la dificultad de reemplazar ideas antiguas por las nuevas, sino a un problema de conceptos incluidos en contextos situacionales específicos.*” Así que es usual que los discentes, rara vez se percaten de sus incoherencias cuando resuelven problemas debido a que sus significados dependen en gran medida de los diferentes patrones de relación en los cuales se insertan (Tamayo, 2006) o lo que ya hemos comentado en otra sección, si los problemas se resuelven satisfactoriamente empleando ciertas ideas, los discentes no se percatarán de sus incoherencias.

Todo esto nos lleva a la conclusión de que, aunque es cierto que el uso de distintas representaciones semióticas de un objeto matemático pueda suponer una ayuda en la adquisición de nuevos y mejores significados de un concepto, además de que evita la confusión entre objeto y representación, ello no lleva implícito una evolución de sus esquemas conceptuales en términos de mejora y adecuación al sentido matemático del mismo. Como afirma Vosniadou (1994) (citado en Tamayo, 2006, p. 46) *“el cambio conceptual procede mediante modificaciones graduales de un modelo, por la vía acumulativa o por la del cambio […] La segunda puede involucrar cambios en creencias individuales, en la estructura relacional de una teoría marco, o a nivel de un modelo teórico.”*

# *2 Diseño de la Investigación y de la Propuesta Didáctica*

En este capítulo presentamos los fundamentos metodológicos de la investigación llevada a cabo en el centro, así como de la innovación docente implantada en el aula con el fin de contrastar los datos obtenidos antes y después de la instrucción.

## 2.1 Objetivos de la Investigación

Las evidencias empíricas mostradas en el capítulo anterior detallan los innumerables problemas que acarrea la enseñanza-aprendizaje de los límites de funciones en la etapa preuniversitaria, así como los obstáculos epistemológicos que el propio concepto entraña. Por ello se hace necesario un estudio en profundidad desde el punto de vista didáctico y epistemológico, con el fin de ofrecer alternativas o pautas que puedan servir y orientar al docente en la planificación de su intervención con el grupo clase, de manera que enriquezca las imágenes conceptuales de los estudiantes y les faciliten el acceso a los sistemas formales tan característicos de los cursos de cálculo universitarios. Los objetivos que nos hemos marcado con el trabajo quedan redactados de la siguiente manera:

1) Identificar los obstáculos epistemológicos y didácticos que han surgido a lo largo de la historia acerca de los límites puntuales de funciones en una variable.
2) Ofrecer instrumentos con los que poder evaluar el nivel competencial adquirido y evidenciar las definiciones personales, favoreciendo la implicación reflexiva del docente con el fin de mejorarlas o adaptarlas a las necesidades de sus alumnos.
3) Ofrecer datos empíricos que permitan contrastar, o al menos crear un espacio de reflexión y debate sobre las innovaciones y nuevos planteamientos llevados a cabo en el aula.

En resumen, este trabajo de fin de máster pretende responder a la pregunta: *¿cómo las innovaciones introducidas en la enseñanza-aprendizaje del límite durante la experiencia, con respecto al enfoque tradicional, afectan a la evolución o no, de los esquemas conceptuales que los alumnos poseen, en cuanto al uso, comprensión del concepto de límite y propiedades?* Para ello llevaremos a cabo una investigación de tipo cualitativa.

## 2.2 Fases de la Investigación

En el centro escolar y siempre y cuando se den las facilidades para ello se establecerán las siguientes actuaciones:

1) Realización de un pre-test a todo el grupo cuya estructura y justificación se detallarán posteriormente. Su objetivo es una primera recopilación de datos sobre las ideas, concepciones y nivel de desempeño de los alumnos con respecto a las capacidades y destrezas vinculadas a los límites de funciones.
2) Realización de un taller de aproximadamente 6-8 horas (se negociará con el docente responsable) repartidas en una o dos semanas, en las que el grupo experimental dirigido por el investigador llevará a cabo un enfoque innovador sobre el límite de una función en un punto, con el objetivo de que logren alcanzar un nivel de desempeño aceptable en las competencias y destrezas asociadas al concepto. Por otro lado, el grupo de control, dirigidos por el profesor encargado de la asignatura seguirá un planteamiento distinto.
3) Realización de un pos-test a todo el grupo, similar en estructura al primero, que permita comparar la evolución de los grupos y validar de alguna manera el impacto de la instrucción y de las innovaciones planteadas.
4) Finalmente, se llevarán a cabo entrevistas con los alumnos de ambos grupos finalizado el pos-test, para que puedan exponer de manera más extensa los razonamientos asociados a sus respuestas. Estos datos permitirán evidenciar aún más si cabe, si aún quedan vestigios de concepciones incorrectas, problemas de compresión…

Con todos estos datos se realizará un informe y análisis que se incluirá en el capítulo 3 de este TFM.

## 2.3 Contenidos Conceptuales asociados al Límite

Una de las innovaciones más destacables de nuestro diseño está referida al cambio de enfoque, es decir, la puesta en valor de los significados, los obstáculos y dificultades asociadas al límite, así como las tareas competenciales por encima de las rutinas algebraicas exigidas en la selectividad. Aun así, conocedores de la realidad de las aulas y del importante impacto que tiene en los alumnos la calificación de las pruebas de acceso, hemos incluido en los materiales del taller un apartado específico al cálculo algebraico, así como alguna sesión específica, de tal manera que pueda satisfacer la demanda –totalmente legítima- de los jóvenes.

Basándonos en los trabajos de Blázquez y Ortega (2000), hemos recopilado y sintetizado una serie de ítems sobre nociones y conocimientos relacionados con los límites de funciones. No son ni mucho menos los únicos, pero entendemos que para un nivel de 2º Bachillerato cumplen estrictamente los mandatos curriculares recogidos en la legislación y además permite tratar algunos tópicos característicos del PMA como son la definición formal o la idea de no existencia. Hemos considerado relevante preguntar un mismo ítem en distintos registros semióticos, convencidos de que poner en funcionamiento actividades de transformación y conversión, ayudará a explicitar aún mejor los esquemas mentales que construyen los alumnos. Los escogidos son el algebraico, numérico y gráfico que por otro lado son los más usuales en la etapa, aunque evidentemente el registro verbal se supone implícito. En algunos contenidos hemos prescindido de algún sistema de representación por el hecho de que no lo consideramos adecuado, como es el caso del algebraico en la definición formal y la no existencia, así que nos conformaremos con que los estudiantes sean capaces de realizar ilustraciones gráfico-verbales, así como utilizar y manipular correctamente la notación de entornos e interpretarlas.

| **Tipología** | | **Registros** | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Contenidos Conceptuales** | **Algebraico** | **Numérico** | **Gráfico** |
| $\lim_{x \to a} f(x)$ | 1.Análisis e identificación de la tendencia lateral en un punto (TLP) | TLPA | TLPN | TLPG |
| | 2. Caracterización del límite en un punto a través de los límites laterales (CLL) | CLLA | CLLN | CLLG |
| | 3. Unicidad del límite de una función en un punto (UL) | ULA | - | ULG |
| | 4. Definición de límite de una función en un punto (DLP) | DLPA | - | DLPG |
| | 5. Idea de no existencia de límite en el punto (INEL) | INELA | - | INELG |
| | 6. Aplicación en la resolución de problemas (ARP) | - | - | - |

*Tabla 1: Contenidos sobre el Límite*

## 2.4 Instrumentos de Recogida de Datos

A continuación, pasaremos a justificar y detallar los instrumentos de recogida de información empleados durante la investigación.

## 2.4.1 Cuestionarios

En el marco de nuestra investigación, y con el fin de poder recabar información acerca de las concepciones de los alumnos y su nivel de comprensión de los tópicos arriba mencionados, hemos elegido como uno de los instrumentos principales los cuestionarios individuales.

Este instrumento de recogida de información permite al profesor conocer flases de las imágenes mentales de los alumnos. Se realizará uno al inicio de la experiencia y otro después de haber recibido la instrucción, con el fin de comprobar si han evolucionado en el sentido de ser más complejas, profundas, coherentes y lógicas en el sentido matemático, además de haber superado los obstáculos que detallan Sánchez Gómez, Contreras de la Fuente o Colombano y Rodríguez entre otros. La muestra de alumnos se dividirá en dos grupos siendo uno de ellos el de control y el segundo el experimental.

Los cuestionarios serán equivalentes en estructura y contenidos. Constarán de diez preguntas de respuesta cerrada (algunas contienen varios subapartados como la relacionada con la unicidad del límite) que movilicen ideas y aspectos conceptuales, así como supongan conflictos cognitivos. Los ejercicios de tipo calculístico (resolución de indeterminaciones o álgebra de límites) podrían aparecer de forma poco significativa y se tendrá en cuenta el razonamiento por encima de los errores de cálculo. Debido a que los procedimientos de tipo algebraico son consustanciales al propio registro hemos de incluirlos.

Siguiendo la línea de nuestra fundamentación teórica, hemos considerado apropiado preguntar un mismo ítem a través de tareas en diferentes registros, ya que de otro modo, las preguntas aisladas podrían ser insuficientes para recabar información de calidad (por ejemplo, la mayoría de alumnos evidencia importantes destrezas en el cálculo algebraico, pero tienen serias dificultades en el registro gráfico puesto que requiere de poner en funcionamiento otras capacidades). Esperamos que las actividades propuestas sirvan como escenario para evidenciar potenciales conflictos cognitivos y factores conflictivos.

Pasaremos a detallar lo que se le requerirá al alumno, así como la tipología de tareas que pueden proponerse. El motivo por el que planteamos varias clases viene motivado porque ello nos ofrece mayor riqueza informativa en cuanto a matices relacionados con obstáculos o dificultades, además de que no propicia situaciones en las que el estudiante se acostumbre a emplear rutinas de pensamiento sistemáticas y haya de reflexionar su respuesta siempre.

1. *Análisis e identificación de la tendencia lateral en un punto (TLP):* el alumno evidencia que comprende el concepto de límite lateral tanto por la derecha como por la izquierda.

   a) *Ítems evaluables*

1.1 *En registro algebraico (TLPA): el alumno analiza la tendencia lateral de una función en un punto a través de su expresión algebraica.*

1.2 *En registro numérico (TLPN): el alumno analiza la tendencia lateral de una función en un punto a través de tablas de valores.*

1.3 *En registro gráfico (TLPG): el alumno es capaz de discriminar la tendencia lateral de una función en un punto a través de su gráfica.*

b) *Tipología de tareas*

*Registro algebraico:* se le propondrá al alumno una expresión algebraica que tendrá que manipular para hallar los límites laterales. Se procurará que no aparezcan indeterminaciones y que los cálculos sean sencillos. Las funciones a trozos pueden resultar una opción interesante, puesto que ponen en funcionamiento ideas topológicas como la de orden en la recta real, imprescindibles para la aprehensión de la tendencia lateral.

*Registro numérico:* se le propondrá al alumno una tabla de valores completa, incompleta, o bien se le facilitará una expresión algebraica para que él mismo la construya y pueda intuir el valor de los límites laterales.

*Registro gráfico:* se le facilitará una imagen con la gráfica de una función y se le requerirá al alumno que razone y determine el valor de los límites laterales. Esta función, puede responder a modelos de tipo continuo o discontinuo, aunque se optará preferentemente por los segundos, ya que pueden provocar conflictos cognitivos de gran valor informativo.

2. *Caracterización del límite en un punto a través de los límites laterales (CLL):* el alumno conoce la relación límite puntual-límites laterales y es capaz de deducir la existencia o no de ambos.

a) *Ítems evaluables*

2.1 *En registro algebraico (CLLA):* el alumno vincula la existencia del límite a la de los límites laterales calculados algebraicamente y viceversa.

2.2 *En registro numérico (CLLN):* el alumno vincula la existencia del límite a la de los límites laterales a través de tablas de valores y viceversa.

2.3 *En registro gráfico (CLLG):* el alumno vincula la existencia de límite a la de los límites laterales presentados de forma gráfica y viceversa.

b) *Tipología de tareas*

*Registro algebraico (Tipo 1):* se le propondrá al alumno una expresión algebraica que tendrá que manipular para hallar los límites laterales. Una vez calculados (pueden aparecer indeterminaciones sencillas), deducirá el valor del límite justificadamente por medio del teorema de caracterización.

*Registro algebraico (Tipo 2):* otra opción de tarea será la de plantear cuestiones teórico-prácticas de carácter algebraico, donde se den algunos datos (si existe límite o no, el valor de un límite lateral…) y se requieran razonadamente otros resultados.

*Registro numérico (Tipo 1):* se le propondrá al alumno una tabla de valores completa, incompleta, o bien se le facilitará una expresión algebraica para que él mismo construya dos tablas (una para analizar la tendencia lateral derecha y otra para la izquierda). A continuación, deducirá la existencia del límite.

*Registro numérico (Tipo 2):* otra posibilidad de tarea será la de plantear cuestiones teórico-prácticas sobre tablas de valores relacionadas con la relación límite puntual-límites laterales.

*Registro gráfico (Tipo 1):* se le facilitará una imagen con la gráfica de una función y se le requerirá al alumno que razone y determine el valor de los límites laterales para luego establecer relaciones con el límite en el punto. Esta función puede responder a modelos de tipo continuo o discontinuo, aunque se optará preferentemente por los segundos, ya que pueden provocar conflictos cognitivos de gran valor informativo.

*Registro gráfico (Tipo 2):* también podrán proponerse cuestiones teórico-prácticas relacionadas con gráfica de funciones, límites puntuales y lateralidad.

*Nota:* aunque pueda parecer que este contenido depende notoriamente del anterior, a la hora del análisis se tendrán en cuenta por encima de todo, los razonamientos que los alumnos establezcan entre la relación límite-límites laterales, no en el propio cálculo de los límites laterales –cuestión que se aborda en el punto 1-.

3. *Unicidad del límite de una función en un punto (UL):* el alumno evidencia que es conocedor de los resultados referentes a la unicidad del límite de una función en un punto y los aplica correctamente. Para ello se distinguirán 3 situaciones, algunas extraídas de (Blázquez y Ortega, 2000) y se emplearán indistintamente los registros gráfico y algebraico (equivalentes, aunque creemos que es más accesible el gráfico e ilustra mucho mejor el nivel de adquisición).

   a) *Ítems evaluables*

   3.1 *Dos funciones distintas pueden tener el mismo límite en el mismo punto:* el alumno entiende y razona por qué dos funciones distintas pueden tener el mismo límite en un punto y que ello no vulnera el teorema de unicidad del límite.

3.2 *Una función puede tener el mismo límite en puntos diferentes:* el alumno entiende y razona por qué una función puede tener el mismo límite en puntos diferentes y que ello no vulnera el teorema de unicidad del límite.

3.3 *Dos funciones pueden tener distinto límite en el mismo punto:* el alumno entiende y razona por qué dos funciones pueden tener distinto límite en el mismo punto y que ello no vulnera el teorema de unicidad del límite.

*b) Tipología de tareas*

Para las tres situaciones se proponen dos tipologías de tarea:

*Tipo 1:* se le pedirá al alumno que aporte ejemplos concretos sobre si las situaciones planteadas son posibles o no. Estos ejemplos pueden ser gráficos, algebraicos o ambos. En caso contrario deberá argumentar por qué dichas situaciones no son posibles -siempre lo son-, de modo que si responden negativamente estarán evidenciando una incoherencia.

*Tipo 2:* se le propondrá al alumno cuestiones teórico-prácticas, relacionadas con las situaciones anteriormente descritas y en las cuales tendrán que conectar diferentes conceptos relacionados con el límite. Primarán los razonamientos relacionados con la unicidad a la hora del análisis y evaluación de la respuesta.

4. *Definición de límite de una función en un punto (DLP):* el alumno conoce, comprende el significado y utiliza la definición formal de límite de una función para realizar demostraciones y exposiciones.

*a) Ítems evaluables*

4.1 *En registro algebraico-gráfico (DLPA):* el alumno debe demostrar la comprensión que posee del concepto de límite a través del uso de los elementos implicados en la definición y apoyándose con ilustraciones gráficas.

*b) Tipología de tareas:*

*Tipo 1:* se le propondrán al alumno casos concretos de funciones a través de expresiones algebraicas y de su gráfica para que ilustre la definición de límite. Se le adjuntarán los siguientes ítems para que le sirvan de guía en la exposición:

- Redacción correcta de la definición.
- Significado de los parámetros $\varepsilon - \delta$ (caso finito) o $M - \delta$ (infinito) (cotas de error).
- Significado de la banda centrada en L y del entorno centrado en $x_0$ y relación entre ambos (caso finito).

- Significado de la recta $y = M$ o $y = -M$, del entorno centrado en $x_0$ y relación entre ambos (caso infinito).
- Interpretación del significado de la definición en términos de aproximación óptima a L por aproximaciones cada vez mejores del punto (caso finito).
- Interpretación del significado de la definición en términos de tendencia al infinito por aproximaciones cada vez mejores al punto (caso infinito).
- Ilustración gráfica de la situación y en la que aparecen todos los elementos señalados.

*Tipo 2:* otra posibilidad de tarea consiste en plantearle cuestiones teórico-prácticas relacionadas con aspectos de la definición en sí. Deberán acompañar igualmente una ilustración gráfica acompañada de una exposición de razonamientos. Los mismos ítems del tipo 1 se adjuntarán para elaborar la respuesta.

5. *Idea de no existencia de límite de una función en un punto (INEL):* el alumno conoce las condiciones de no existencia de límite de una función en un punto y utiliza la definición inversamente para probar que un determinado valor L no es el límite, que no tiende a infinito, o simplemente que no tiene límite.

   *Nota:* Este apartado responde a los mismos parámetros que el anterior simplemente que la definición y los cuantificadores han de usarse de forma inversa.

6. *Aplicación en la resolución de problemas (ARP):* para este apartado no se distinguirán registros ya que se trata de un conocimiento transversal. El alumno es capaz de identificar a través de diferentes contextos y problemas, situaciones donde aparece implícito el concepto de límite y utilizarán dicho objeto matemático para establecer razonamientos adecuados que le permitan resolverlo eficazmente. Se valorarán principalmente los razonamientos y exposiciones de ideas y en menor medida la correcta ejecución.

   b) *Tipología de tareas:* se le facilitarán al alumno enunciados de problemas relacionados con ámbitos cotidianos, científicos, sociales… acompañados de una o varias preguntas a la que tendrán que responder razonadamente.

## 2.4.2 Diario de Clase

Durante el período de instrucción se llevará a cabo un diario de clase donde se registrarán las decisiones e hitos más importantes de la experiencia con el fin de arrojar luz a posibles relaciones de causalidad con los resultados obtenidos. Incluirá reflexiones y descripciones de situaciones dadas en el aula de valor informativo y explicativo.

### 2.4.2 Entrevistas

Las pruebas, exámenes o cuestionarios están sujetos a un tiempo establecido y por la propia configuración de estos, no permiten a los alumnos explicar detalladamente los razonamientos y formas de pensar que los llevan a responder de la manera en qué lo hacen. Siguiendo el modelo propuesto por (Blázquez y Ortega, 1998), llevaremos a cabo entrevistas con una muestra de estudiantes de ambos grupos una vez hayan realizado los cuestionarios inicial y final. El investigador realizará un análisis previo para detectar aquellas respuestas más llamativas y se invitará al discente a que exponga sus argumentos fuera del aula. A su vez se le plantearán cuestiones relacionadas con los tópicos tratados cuyo objetivo es ponerlo en situaciones que evidencien inconsistencias en sus esquemas conceptuales y que pueden no haber aflorado durante la propia realización de los cuestionarios debido a que los estímulos de las tareas no hayan sido suficientes.

## 2.5 Diseño del Taller

Artigue (1995), propuso en su enfoque para la enseñanza del cálculo "*tomar como punto de partida las intuiciones y concepciones de los alumnos, para posteriormente evolucionar mediante el uso de situaciones adaptadas*" (Artigue, 1995, p.117). Este es esencialmente el espíritu que impregna el diseño de nuestra propuesta didáctica, partir de las imágenes conceptuales de los alumnos, para luego "bombardearlas" con una batería de problemas y actividades que intenten poner en evidencia sus inconsistencias y se les obligue así a evolucionar y transformarlas. El objetivo principal es que logren aprehender los principios básicos de la definición formal de límite, tan compleja por su excesivo formalismo que queda completamente relegada en el Bachillerato pero que en la universidad es de estudio obligado, y entendemos que semejante salto conceptual provoca dificultades en los estudiantes. Por ello, un primer acercamiento y manejo intuitivo de la misma, servirá como nexo y puente entre el Curriculum de Matemáticas de 2º de Bachiller y la Universidad.

### 2.5.1 Elementos Didácticos de la propuesta

1) *Trabajo grupal:* durante todas las sesiones, la distribución de los alumnos en el aula será por pequeños grupos de unos 3 o 4 miembros con el fin de promover la colaboración, el intercambio de ideas y el debate. Algunas tareas serán de tipo cooperativo, donde se requerirá a los grupos que preparen una exposición para los compañeros sobre pequeñas partes de la secuencia didáctica y

posteriormente se enfrentarán a turnos de preguntas para comprobar el nivel de comprensión. El profesor propondrá cuestiones que movilicen ideas y propicien el debate entre todos los compañeros de la clase, actuando el mismo como moderador y conductor.

2) *Tareas significativas:* siguiendo la teoría de las imágenes conceptuales, observamos que las actuales organizaciones didácticas promueven tareas que activan partes muy parceladas de los esquemas mentales y dado que el objetivo es resolverlas satisfactoriamente, el alumno recurre a procesos internos que en principio pueden resultar ilógicos desde un punto de vista global, aunque son económicamente factibles. Para mejorar y enriquecer la imagen conceptual de límite es necesario proponer tareas que explícitamente cuestionen sus ideas previas, favoreciendo la aparición de conflictos cognitivos y obligando al discente a cambiar y transformarlas. Además, incluimos gran variedad de problemas para que el alumno perciba lo que aprende como algo útil y dentro de un contexto de aprendizaje significativo. También se han introducido multitud de ejercicios con los que poder adquirir rutinas y elementos esenciales en el manejo de los límites.

   Por poner un ejemplo, haremos referencia a un problema extraído de Colombano y Rodríguez, (2010) el cual hemos modificado levemente y que se incluye en los problemas finales del manual del alumno (p.42 manual):

   *Una bola de billar está suspendida por un hilo desde el punto A, a 100 cm de la pared. Se aparta la bola de la vertical 20 cm y se suelta. Ella oscila, y la distancia de la bola a la pared varía en función del tiempo transcurrido hasta que se queda quieta nuevamente.*

   a) *Esbozar la gráfica de la distancia de la bola a la pared en función del tiempo.*
   b) *Elegir entre los siguientes números, aquel que consideres como el límite de la distancia de la bola a la pared, en función del tiempo. Justifica tu respuesta (no se añaden las opciones por espacio)*
   c) *¿En algún momento ocurre que la distancia de la bola a la pared es mayor que el valor del límite dado en b? ¿Y menor?*
   d) *¿En algún momento la distancia de la bola de billar a la pared es igual que el valor del límite dado en b)? ¿Contradice esto la idea de límite?*

   Esta actividad trata de evidenciar la inconsistencia del modelo cota y de aproximación no alcanzable. Se propone un fenómeno físico sencillo y de fácil reproducción para que le sirva como recurso de memoria en otros casos similares. Además, se trabaja la competencia de (Niss, 2003) *modelizar matemáticamente* en el primer apartado a través del registro gráfico. Los alumnos deben debatir si estamos ante un modelo continuo o discontinuo, si la gráfica está acotada o no, si posee picos o los extremos son suaves… Todas estas decisiones condicionarán su producto final, y aunque se enmarcan fueran del contexto de los límites enriquecen el aprendizaje y fomentan la colaboración.

3) *Nuevas tecnologías:* el tratamiento de los contenidos mediante varios registros es otra de las innovaciones propuestas. Entendemos que los alumnos alcanzan un nivel de aprehensión del concepto si son capaces de utilizar correctamente los significados de límite de diferente manera (algebraica, gráfica o numérica). Frente a la enseñanza tradicional donde el registro algebraico copa el protagonismo en el aula, apostamos decididamente por el registro gráfico y los programas de representación como Geogebra. A su vez, el diseño de simuladores y programas para ilustrar y aclarar los conceptos formales, sustituirán las imágenes estáticas de los libros y la pizarra, además de convertirse en una herramienta fundamental de la enseñanza.

   Como muestra, el investigador ha diseñado dos simuladores interactivos para ilustrar la definición formal de límite de una función en un punto. El objetivo es que el estudiante pueda ponerse todos los ejemplos que necesite y realizar autónomamente ejercicios y problemas. Su uso es muy sencillo e intuitivo. A continuación, exponemos algunas de sus funcionalidades[1]:

   1) El alumno puede insertar la función que desee en el cuadro f(x) tanto modelos continuos como discontinuos. A su vez, puede determinar en qué punto va a calcular el límite. El software calcula su valor y lo muestra por pantalla junto a la etiqueta "Valor Límite". Si aparece un signo de interrogación entonces es que no existe.
   2) Se muestra el valor de la imagen en el punto con el fin de que los alumnos entiendan la diferencia entre límite e imagen y visualicen suficientes ejemplos de modelo hueco completado o no completado.
   3) Las barras Epsilon y Delta proponen diferentes valores para que el estudiante pueda comprender el papel de estos parámetros y la relación entre la banda centrada en L y radio $\varepsilon$ (marcada en cyan) con el entorno centrado en el punto $x_0$ y radio δ (color rojo).
   4) La barra rotulada como candidato permite al alumno escoger diferentes puntos como posibles aspirantes a valor de límite de modo que, mientras difiera del valor real mostrado en pantalla tendrán que emplear la definición al contrario, es decir, para demostrar que no es ese el valor o

[1] Los simuladores están a disposición del usuario en: https://ggbm.at/duGhQTGH y https://ggbm.at/ysCDMJex

que no existe. Este ejercicio es muy importante para comprender el tópico 5 de la lista de contenidos.

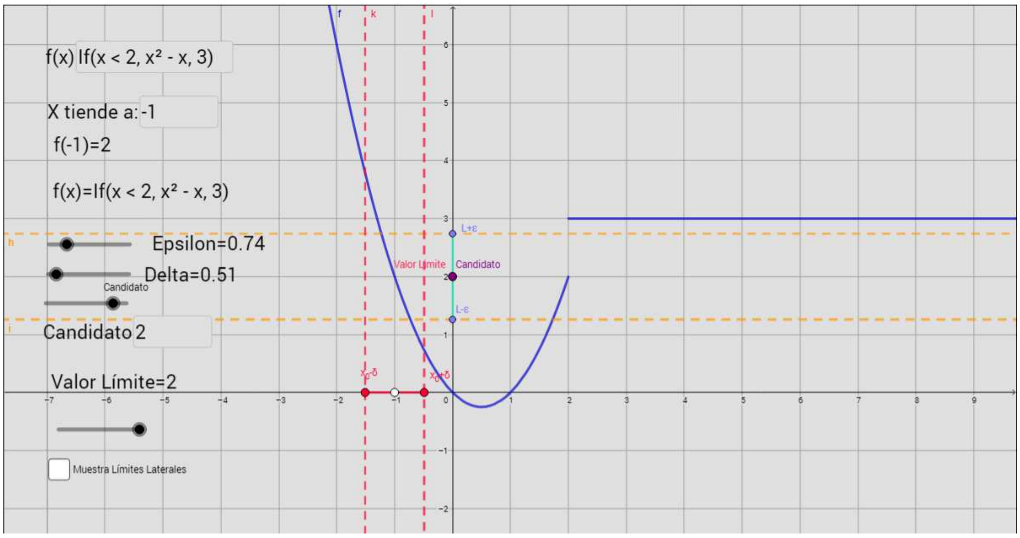



*Ilustración 2: Simulador Definición Límite Finito. (Elaboración propia)*

5) Finalmente hemos incorporado una pestaña para que, si el alumno lo desea, pueda visualizar dinámicamente los límites laterales.

6) El otro simulador permite realizar las mismas demostraciones, pero en el caso de límites puntuales infinitos. Los cambios residen en que, como la propia definición así lo indica, cambiamos las bandas y el ε, por M y la recta y = M o y = - M. Ésta queda dibujada en rojo. El resto de aplicaciones son idénticas al caso finito.

Con estos recursos pretendemos facilitar la comprensión de los alumnos en cuestiones tan propias del PMA como la definición formal de límite –caso finito e infinito- que tantas dificultades produce debido a su excesivo formalismo y poca intuición. Como es de esperar, entendemos que los discentes necesitarán realizar un esfuerzo notorio para llegar a aprender su significado, por lo que consideramos que en la etapa de Bachillerato es suficiente con un acercamiento desde el registro gráfico dejando las demostraciones algebraicas de lado. Realizar exposiciones sobre diferentes ejemplos, ilustrando el sentido y significado de los parámetros, o resolver cuestiones relacionadas implícitamente con la propia definición, ya suponen un salto cualitativo importante; puesto que de lo que se trata es de adquirir significados sólidos y establecer conexiones entre las ideas previas –aproximación mejorable, modelos dinámicos…- y comprobar que la formal ya ha superado todas esas inconsistencias.

4) *Historia de las matemáticas:* el modelo de enseñanza formal tal y como describíamos en la fundamentación teórica, muestra los objetos matemáticos como algo pulido y terminado. Este planteamiento priva al alumno de conocer matices importantes así como de enfrentarse a posibles conflictos epistémicos

de gran valor formativo. Por ello hemos creído necesario insertar elementos históricos en el proceso de enseñanza mediante un estudio previo de la evolución del concepto a través de los artículos de (Medina, 2000) y (Blázquez y Ortega, 2002), ya que estamos de acuerdo con lo que afirma Lupiáñez: "*un correcto uso de la Historia no es sencillo para los profesores pues carecen por lo general de una formación al respecto y que, por ende, tampoco es fácil para los estudiantes"* (Lupiáñez, 2002, p.60). Queremos poner de relieve la valiosa información de carácter pedagógico y epistemológico que nos han aportado los estudios históricos sobre límites, ya que se pueden vislumbrar distintos esquemas conceptuales en diferentes períodos de la historia. Por poner un ejemplo, los griegos utilizaban nociones de límite como proceso en contextos geométricos –método de exhaución- y las ideas de aproximación ya se encontraban implícitas en los trabajos de Leibniz y Newton, mientras que el modelo cota es característico de D'Alembert. En el libro de texto redactado para el alumno, hemos incluido a tres matemáticos importantes de los siglos XVII, XVIII y XIX junto a sus definiciones de límite, todas ellas con ideas muy intuitivas y conocidas, es más, es de suponer que muchas se correspondan con las suyas propias. A partir de ahí, se trabajarán todas las inconsistencias derivadas, así como los problemas matemáticos que llevaron a su evolución, evidenciando las incoherencias y promoviendo su transformación hacia la de Weierstrass –actualmente aceptada por la comunidad matemática-. Es más, el uso de la historia cumple un doble objetivo puesto que, aunque las versiones aportadas presentan errores importantes, algunas de las ideas que encapsulan son válidas y quedan recogidas implícitamente en la definición formal, por lo que conocerlas facilitará enormemente la comprensión de la última.

5) *Libros de Texto y materiales:* bajo el título *Introducción al Estudio de los Límites de Funciones* realizamos nuestra propuesta innovadora en lo referente a los manuales escolares usuales. Este documento contiene todos los contenidos a trabajar, así como gran cantidad de ejercicios y problemas que ayudarán al alumno a profundizar en el aspecto conceptual del límite. Se divide en 5 capítulos siendo los dos últimos opcionales -límites en el infinito y álgebra de límites- y cubren no sólo los contenidos curriculares básicos exigidos en la legislación, sino también otros aspectos descuidados como la resolución de problemas o el tratamiento formal.

   Para su diseño, nos hemos basado en el análisis realizado por Sánchez y Contreras de la Fuente (1998) sobre manuales de COU, BUP y Universidad relacionados con el tópico, en el que reflexiona sobre diferentes aspectos como la *"forma de introducir la noción de límite, definición con la que se formaliza la noción, ejemplos, concepciones que se derivan del manual y obstáculos y dificultades que se extraen de los contenidos"* (Sánchez Gómez y Contreras de la Fuente, 1998, p.77). Por poner algún ejemplo de las ideas que hemos recogido tras la lectura del artículo, queremos citar las siguientes:

- *"Creer que la existencia de límite de una función en un punto significa que los valores de la variable dependiente se acercan a algo"* (Sánchez Gómez y Contreras de la Fuente, 1998, p.76). Para romper esta idea se propone el ejemplo 2.3 de la página 11 del manual.
- *"Creer que las variables independientes o dependiente toman el valor de ∞"* (Sánchez Gómez y Contreras de la Fuente, 1998, p.76). Se explicita claramente en la página 18 primer párrafo.
- *"Creer que el límite de una función en un punto es el valor de la función en ese punto"* (Sánchez Gómez y Contreras de la Fuente, 1998, p.77). Este error es tan frecuente debido al excesivo protagonismo que se le da al cálculo de límites e indeterminaciones por sustitución directa que en la página 33 del manual se anexa un cuadro aclaratorio donde se justifica su uso.

El libro parte de unas cuestiones iniciales para que los discentes puedan ir movilizando ideas. A continuación, se pasa al estudio histórico, incluyendo notas biográficas y ejemplos que muestran cómo resolvería cada matemático los ejercicios planteados, así como las inconsistencias derivadas. Los capítulos siguientes muestran los contenidos curriculares y señalados en este trabajo comenzando por la versión de límite dada por Weierstrass, pasando por los límites laterales y la unicidad, para terminar con las técnicas de cálculo.

Incluye numerosos ejemplos resueltos, detalladamente comentados, con indicaciones expresas sobre cómo evitar los errores más comunes y siempre argumentando las decisiones y razonamientos empleados. El tratamiento matemático se ha cuidado enormemente por ser un tópico fundamental del PMA, recurriendo a manuales de cálculo universitario. Los resultados, proposiciones, demostraciones… se incluyen porque tal y como dijimos en la fundamentación teórica, es necesario que los estudiantes vayan transitando desde los modelos de enseñanza matemática elementales a los de pensamiento avanzado. Aun así, conocedores de las dificultades e inconvenientes que conlleva el modelo formal hemos adjuntado gran cantidad de información y notas aclaratorias –véase la página 23 del libro sobre el teorema de caracterización de límites laterales- con el fin de que vayan habituándose y trabajando la competencia de Niss, pensar matemáticamente.

La colección de problemas finales sirve como síntesis a todo lo estudiado y obliga al alumno a pensar y razonar, así como a poner en juego estrategias de resolución, puesto que no se han agrupado bajo ningún criterio temático visible a priori –como acostumbran las editoriales- de modo que, en principio, no poseen indicio alguno sobre qué tópico versan. Esta es una de las principales críticas que hacemos a los libros de texto y que hemos querido cambiar.

Para finalizar y como otros materiales complementarios, destacamos unas diapositivas resumen elaboradas con el fin de que los alumnos puedan tener rápido y fácil acceso a las definiciones y resultados, así como para llevar a cabo las exposiciones de aula. Finalmente se realizó un pequeño cuadro resumen a semejanza del que puede verse en la página 29 del manual, y cuya inclusión se propone como mejora futura, en la que se pretende trabajar desde el registro gráfico las distintas posibilidades de existencia o no, de límite de una función en un punto (Anexo III, p.71).

6) *Rol de los estudiantes y del docente:* tal y como se desprende de los apartados anteriores, la propuesta de intervención propicia un espacio donde el protagonismo lo copan los alumnos, el debate y la contraposición de sus esquemas mentales. El papel del profesor consiste en proponer actividades que demanden al alumno una mayor implicación, así como provocar conflictos cognitivos y de ideas. No obstante, en algunos momentos, sobre todo en las partes más gruesas como son las definiciones formales de límite finito e infinito, sí que consideramos que el docente debe recurrir a la clase magistral y centrar un poco más la atención en él, para que los alumnos logren familiarizarse un poco con el formalismo inherente. Se propondrán trabajos y tareas que requieran de la reflexión conjunta y de colaboración entre iguales. Se valorará muy positivamente la formulación de preguntas en clase por parte de los estudiantes y otras que proponga el profesor con el objetivo de aclarar ideas y detectar esquemas erróneos.

# *3 Análisis de los Resultados*

En este último capítulo de la memoria realizaremos un análisis exploratorio de los resultados obtenidos tras el período de intervención en el centro. Como dato importante, señalar que la muestra final fue de 32 estudiantes ya que la jornada en la que tuvo lugar el primer test, dos alumnos no asistieron –uno de cada grupo- y de 33 en el test final –no asistió uno del de control-.

El grupo clase se dividió por orden alfabético en dos partes de 17 alumnos, siendo el de control responsabilidad del docente encargado de la materia y el experimental por el investigador. El criterio de formación lo decidió el profesor del centro. Según me comentó, no conocía a la clase previamente y consideraba que los niveles eran similares.

El primer cuestionario se celebró el día 2 de octubre de 2017, durante la hora de matemáticas (9:15/10:15) aunque su duración exacta no fue de 60 minutos, sino de 50 minutos. Los alumnos no habían sido avisados y en general dejaron muchas preguntas sin contestar evidenciando un bajo nivel competencial y de conocimientos. El profesor indicó nada más empezar que aquello no contaba para nota, que algunas tareas eran muy difíciles –sobre todo de la pregunta 7 en adelante- y que aparecían contenidos no estudiados en cursos previos –como la definición formal de límite-. Esta primera experiencia sirvió para cuestionar la enseñanza recibida en el curso previo, puesto que no parece que haya supuesto un aprendizaje significativo. Eso sí, durante el escrutinio de algunas respuestas, se observa como algunos discentes intentaban reproducir sin éxito ciertas técnicas algebraicas de cálculo bastante frecuentes en 1º de Bachillerato.

En cuanto al segundo cuestionario, se celebró el 17 de octubre de 2017 en la hora de matemáticas (8:15/9:15) y su duración no fue de 60 minutos, sino de 45 minutos aproximadamente debido a cuestiones de rutina propias del centro –hacer una reflexión, llegada del docente y los alumnos, preparación del material…- Esto pudo influir negativamente en los resultados –muy levemente- porque algunos discentes alegaron no haber tenido suficiente tiempo para contestar. El profesor días antes había aclarado que aquello no contaba para nota, lo cual ha supuesto una merma de credibilidad sensible en los resultados finales ya que, en líneas generales, la evolución ha sido pobre y escasa, motivado en parte porque los alumnos no han estudiado a conciencia los contenidos. A priori, y como muestran las gráficas y las entrevistas, los alumnos de ambos grupos siguen evidenciando incoherencias, siendo el grupo de control levemente mejor al experimental. En contraste, también parece claro que los estudiantes que conformaban el grupo experimental partían de un nivel competencial inferior, por lo que las condiciones iniciales no eran similares.

De las 10 preguntas que componían cada cuestionario, se han analizado todas menos la octava y la novena, ambas relacionadas con la definición formal de límite y la idea de no existencia. La justificación es que el grupo experimental no tuvo tiempo de abordar mínimamente dichos contenidos por lo que se les avisó de antemano que no contestasen. Por el contrario, el grupo de control sí había dedicado una hora de instrucción a la definición formal –según el docente- pero ninguno de los estudiantes de su grupo ha sido capaz de contestar a la tarea –y eso que se optó por proponer la tipología 1 que suele ser más accesible- lo que viene a demostrar que ésta se ha trabajado de manera superficial y en sentido anecdótico.

En otro orden de cosas, tal y como pude constatar en las entrevistas, se observa que muchos alumnos contestan aparentemente bien las tareas en los cuestionarios, pero sin acompañar justificación ninguna de su razonamiento, lo que hace aún más difícil explorar sus esquemas mentales. Se les ha asignado la categoría *responden bien (RB)* aunque después durante los encuentros, se hayan detectado concepciones erróneas. Estas situaciones son de gran riqueza informativa, puesto que nos llevan a plantearnos una revisión del instrumento de medida, así como verificar un hecho común en la enseñanza: resolver un problema no implica una comprensión real sobre lo que se responde. Se puede tener un 10 en una prueba escrita y tener imágenes conceptuales alejadas del significado del concepto.

La categoría *responden sin sentido (RSS)* aglutina gran cantidad de respuestas incorrectas que no se han incluido en la categorización por ser menos frecuentes o asociadas a otros contextos no relacionados con el límite –problemas con los registros semióticos, concepto de función…- No obstante, podrá incluirse algún comentario al respecto con el fin de enriquecer aún más si cabe el análisis.

Aclarados todos los inconvenientes previos, comenzamos con el estudio exploratorio de los datos. Las etiquetas C y E hacen referencia al grupo de control y experimental (colores azul y rojo respectivamente), mientras que los índices 1 y 2, significan pre-test y pos-test (tono claro y oscuro respectivamente). Para entender las siglas de las frecuencias consúltese el anexo V (p. 75) según el ítem que se esté analizando.

## 3.1 Tendencia Lateral en un Punto de forma Algebraica

Este tópico se trabaja en la primera pregunta de los cuestionarios. Las categorías de respuesta pueden consultarte en el anexo V (p.75). En líneas generales podemos afirmar que no hay una evolución significativa en el grupo experimental ya que casi la mitad de los alumnos siguen sin responder bien. Del de control salvo 6 discentes, todos contestan adecuadamente y esta mejoría puede venir motivada por el gran protagonismo que se le ha dado al cálculo algebraico de indeterminaciones. En el pre-test el ejemplo propuesto presentaba un valor absoluto que muy pocos alumnos han sabido manipular, lo cual evidencia carencias en la comprensión de esta función que suele estudiarse en 1º de Bachillerato.

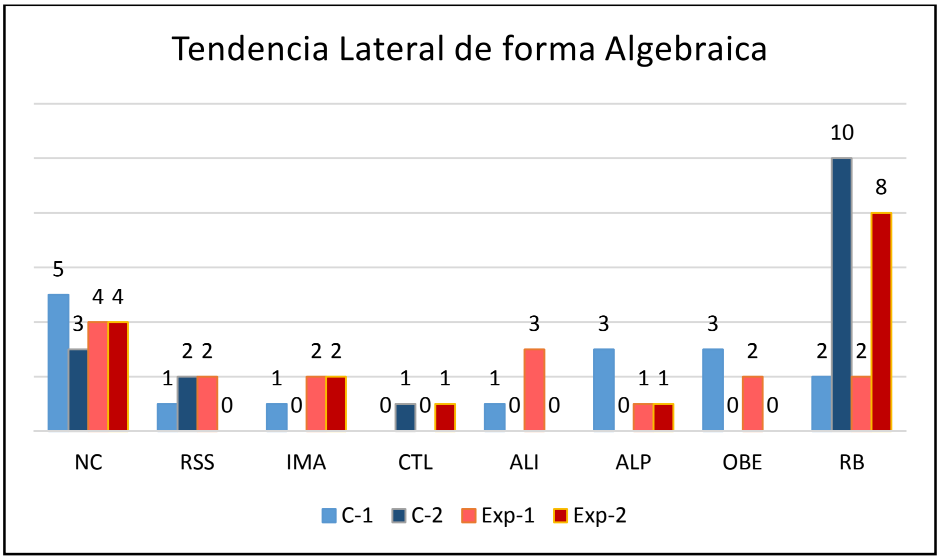
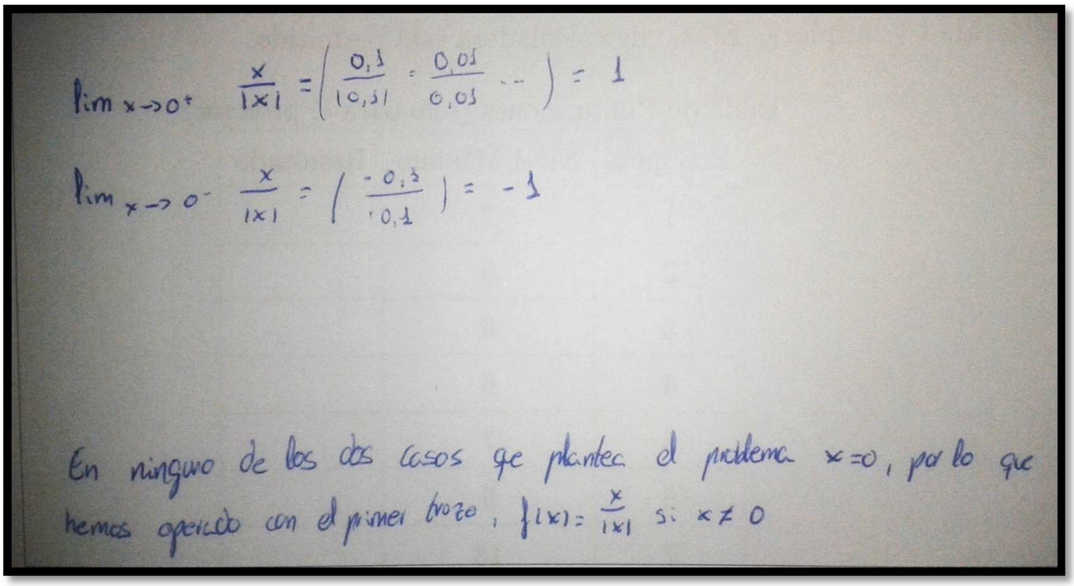



*Ilustración 3: Frecuencias relacionadas con el ítem: análisis de la tendencia lateral en un punto de forma algebraica. Elaboración Propia*

Con un simple vistazo, es fácil ver que ambas funciones de los tests poseen discontinuidades en el punto donde se quiere calcular el límite. Se ha decidido incluir este modelo de actividad porque cuando se dan estas situaciones, límite e imagen no coinciden y este error es bastante frecuente debido a que los alumnos calculan límites sustituyendo el valor del punto en una fórmula. Muchas veces este procedimiento no da resultado, es más, casi nunca suele ser así. Es lo que se conoce como indeterminación. Ante este problema el alumno puede optar por varios caminos: decir que no existe límite -estaría cometiendo un posible error- usar alguna estrategia de cálculo, recurrir a la gráfica -si es capaz de esbozarla- o empezar a dar valores cercanos en el punto e intuir una tendencia. Lo último puede observarse en la Ilustración 4. Esta idea es inconsistente puesto que se presupone una falsa monotonía en la función, además de que por la noción de tendencia, si $x \to a$ quiere decir que podemos tomar valores tan cercanos a "a" como deseemos y la función comenzar a comportarse de modo distinto sin que ello afecte a la existencia de límite. Véase el Diálogo 1 (p. 79) donde se le hace ver a un alumno que infiere incorrectamente cierta información –inconscientemente- , producida sobre todo por el abuso de las tablas de valores como herramienta para explicar el concepto intuitivo de límite y las rutinas de cálculo que ahondan más esta idea.

Se observa que el error ALP (asociar límite con un punto cercano) suele ser infrecuente en el caso de funciones constantes como la del pre-test. La razón está en que estos ejemplos son muy sencillos de visualizar mentalmente en el entorno del punto, por lo que no necesitan de sustituciones, ni ninguna representación compleja que le permita conectar rápidamente con las ideas subyacentes.

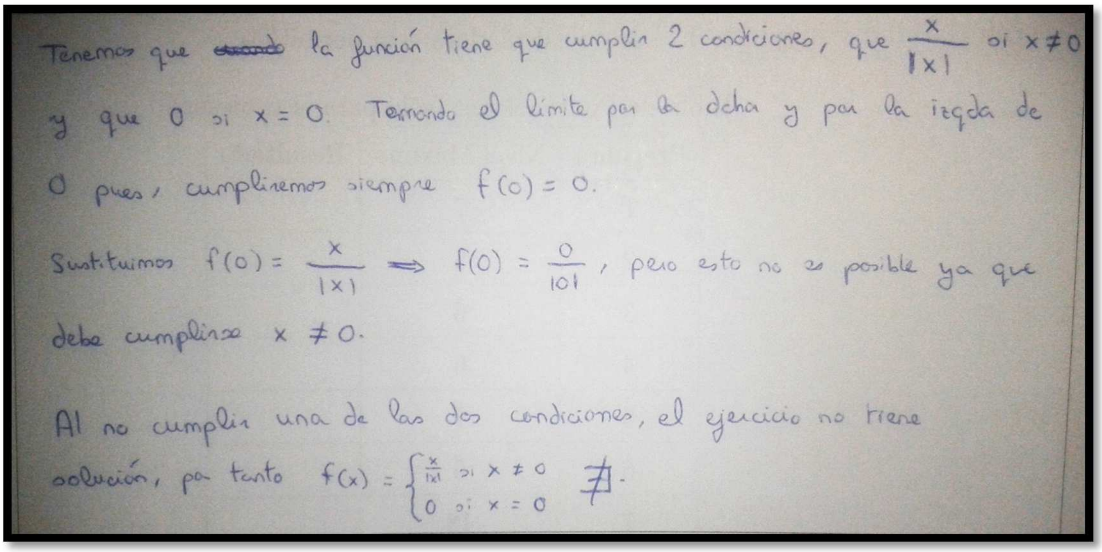


$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = \left( \frac{0,1}{|0,1|} \cdot \frac{0,01}{0,01} \dots \right) = 1$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \left( \frac{-0,1}{|-0,1|} \right) = -1$

En ninguno de los dos casos qe plantea el problema $x=0$, por lo que hemos operado con el primer trozo, $f(x) = \frac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$

*Ilustración 4: Un alumno asocia el valor del límite con una sucesión de imágenes de la función en un punto cercano (Pre-test, Grupo Control)*



Tenemos que ~~cuando~~ la función tiene que cumplir 2 condiciones, que $\frac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$ y que 0 si $x = 0$. Tomando el límite por la dcha y por la izqda de 0 pues, cumpliremos siempre $f(0) = 0$.

Sustituimos $f(0) = \frac{x}{|x|} \Longrightarrow f(0) = \frac{0}{|0|}$, pero esto no es posible ya que debe cumplirse $x \neq 0$.

Al no cumplir una de las dos condiciones, el ejercicio no tiene solución, por tanto $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \nexists$.

*Ilustración 5: Alumno asocia límite con imagen e indeterminación con no existencia de límite (Pre-test, Grupo Control)*

Tras el taller, tres alumnos del grupo experimental siguen con la idea de que límite es igual a imagen y eso que se trabajó en varias sesiones (consúltense los fragmentos del diario 1 p. 95 y fragmento 2 p. 95). Esta idea es muy resistente ya que continuamente la están empleando al calcular límites (el primer paso para resolver tareas de cálculo consiste en hallar la imagen en el punto), involucra nociones de continuidad para lograr entender su sentido por completo y a pesar de que ésta se ha estudiado el año anterior, es intrínseca al concepto de límite creando un bucle que retroalimenta el error (la definición formal de continuidad puntual hace referencia explícita al valor del límite en dicho punto).

## 3.2 Tendencia Lateral en un Punto de forma Numérica

En este tópico observamos que los alumnos en general y sobre todo el grupo experimental, tienen serios problemas para trabajar con el registro.

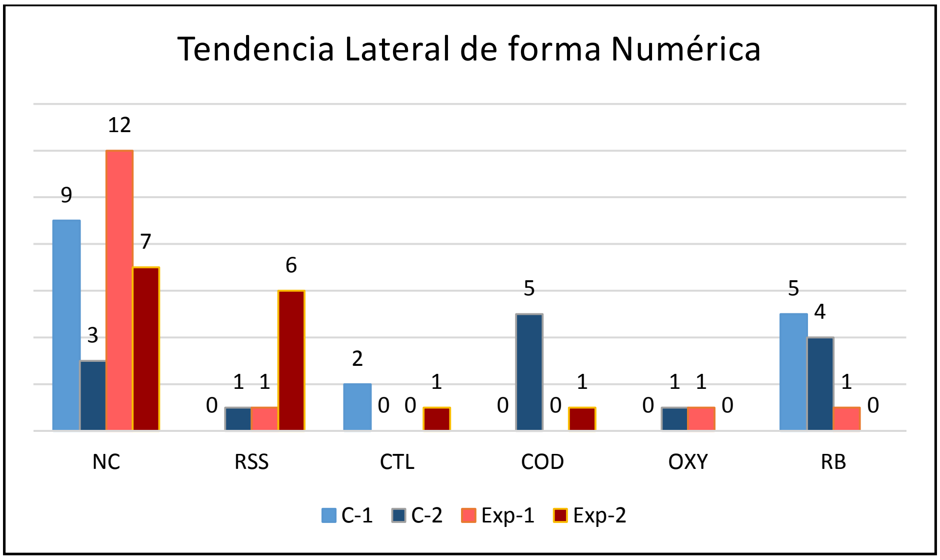



*Ilustración 6: Frecuencias relacionadas con el ítem: análisis de la tendencia lateral en un punto de forma numérica. Elaboración Propia*

El fragmento del diario número 3 (p. 96) constata las dificultades detectadas con el registro. Un análisis de las respuestas ha evidenciado los siguientes errores:

1) Confunden el orden de los números decimales (COD): es más frecuente en el grupo de control que en el experimental. Los alumnos entienden que conforme más cifras en la parte decimal, más cerca está del número que quiere aproximar. Este fenómeno no se da cuando el punto cuyo límite queremos calcular es un entero, ya que las aproximaciones por la derecha e izquierda consisten en añadir ceros o nueves.

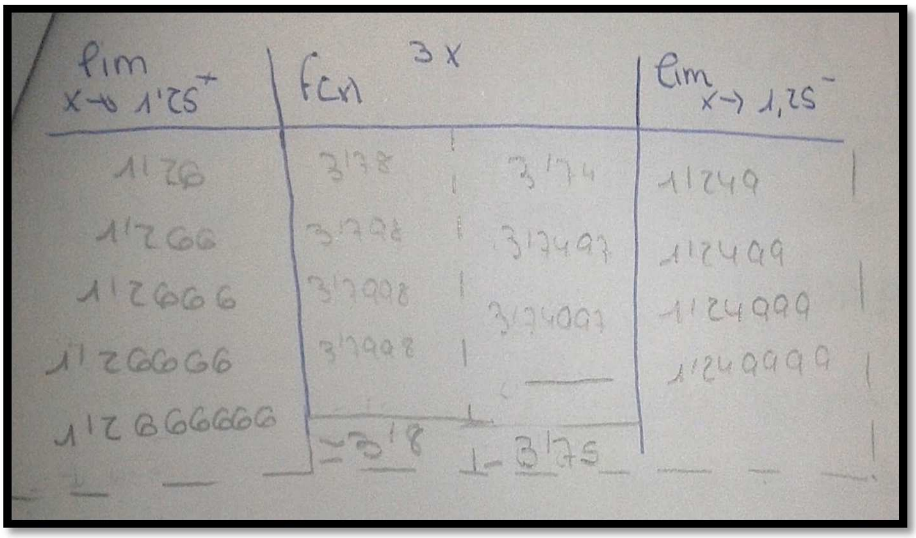


*Ilustración 7: La sucesión de valores* $1{,}2\hat{6}$ *tiende a 1.25 (Pos-test, Grupo Control)*

Otros estudiantes decían que los límites laterales eran infinito puesto que como la evaluación de la función cada vez arrojaba más dígitos en la parte decimal, los consideraban mayores. El problema es de importante gravedad ya que las nociones de ordenación de decimales se estudian en los primeros cursos de la ESO. El motivo de proponer $\lim_{x\to 1.25} f(x)$ ha sido verificar hasta qué punto otros conceptos no necesariamente ligados al de límite condicionan el nivel de desempeño.

2) No comprenden el concepto de tendencia: problema derivado del excesivo uso de valores cercanos al punto para evaluar la función y asociarlo al resultado del límite. El propio registro les supone una limitación ya que no pueden visualizar mentalmente la función en un entorno a una escala adecuada (está puesto a propósito). En la Ilustración 8 se observa como un alumno construye mal la tabla cuando $x \to 1.25^-$ ya que observa que la función vale 0.85 cuando x= 1.249999 y de ahí deduce que al estar muy cerca, para todos los valores por la izquierda su imagen por f es 0.85. Por el contrario, en el diálogo 2 (p. 80) se observa el caso de un estudiante que razona correctamente la cuestión pero es debido a las condiciones del registro semiótico y no por los significados implícitos, los cuales no termina de comprender.

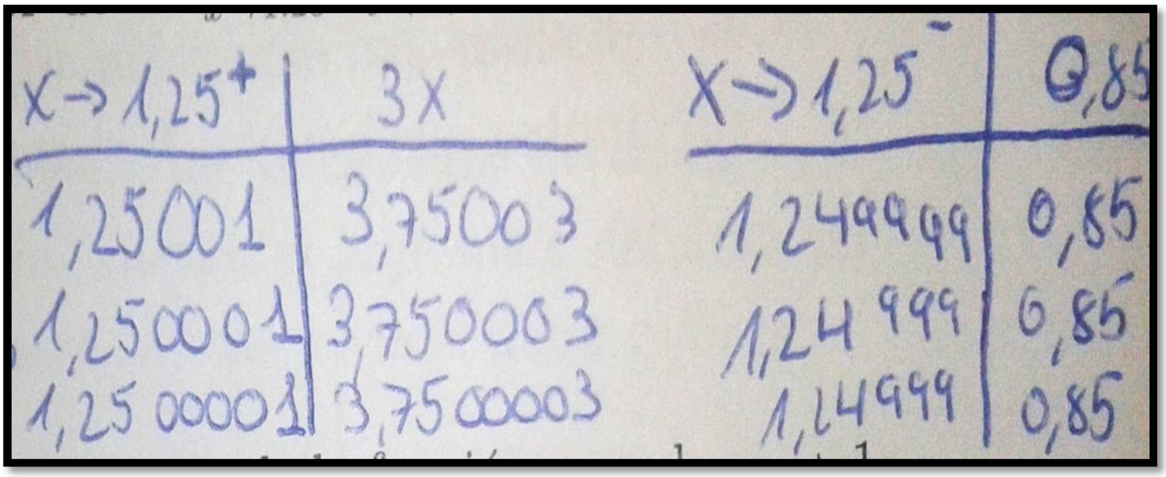



*Ilustración 8: Alumno de Control construye mal la tabla (Pos-test, Grupo Control)*

3) Responden sin sentido (RSS): analizando los cuestionarios hemos encontrado muchísimas incongruencias graves tales como realizar reglas de tres de proporcionalidad directa tomando algunos valores tabulados, cálculo de promedios, dar como valor para el límite el $f(x)$ que aparece en la tabla y cuyo x está más cercano al punto, resolver la ecuación 3x=valor y formar una tabla donde $f(x) = \frac{valor}{3}$ entre otros.

En líneas generales la instrucción de ambos grupos evidencia una dejadez y descuido en el uso del registro numérico, sobre todo el experimental. Es cierto que el sistema de representación sintetiza muy bien nociones como aproximación y tendencia, pero también supone gran cantidad de limitaciones y matemáticamente es poco “ortodoxo”, siendo relegado en la enseñanza formal de las matemáticas a un segundo plano en pos de fomentar el algebraico y seguidamente el gráfico.

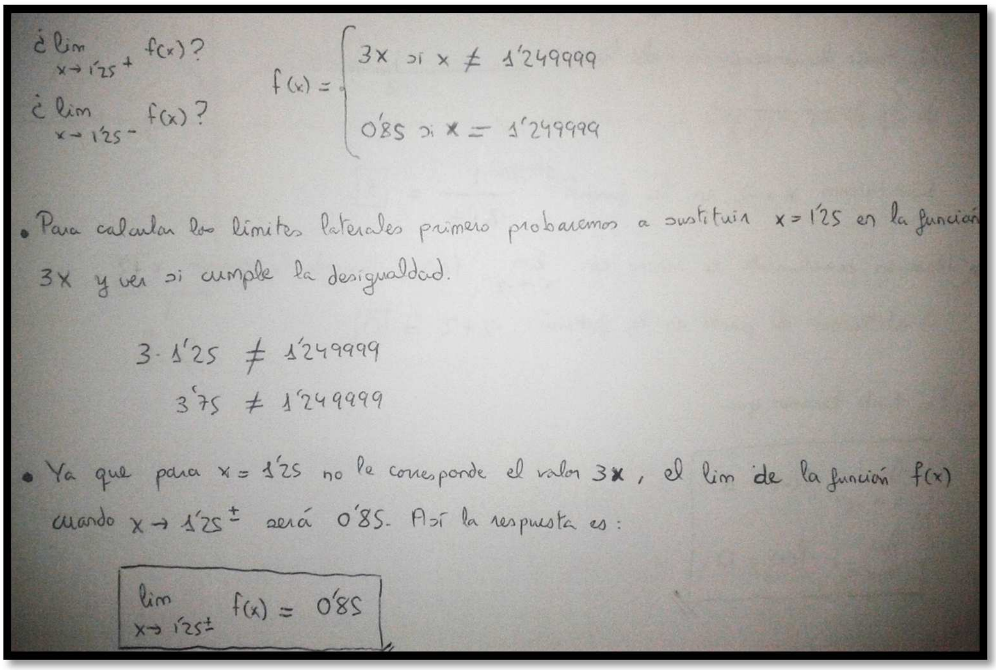



*Ilustración 9: Argumentación sin sentido lógico (Pos-Test, Grupo Experimental)*

## 3.3 Tendencia Lateral en un Punto de forma Gráfica

La pregunta 3 requería analizar la tendencia lateral mediante la gráfica de una función. En el pre-test, el modelo era discontinuo y en el pos-test continuo. El grupo de control ha evolucionado favorablemente a la vista del alto número de respuestas correctas.

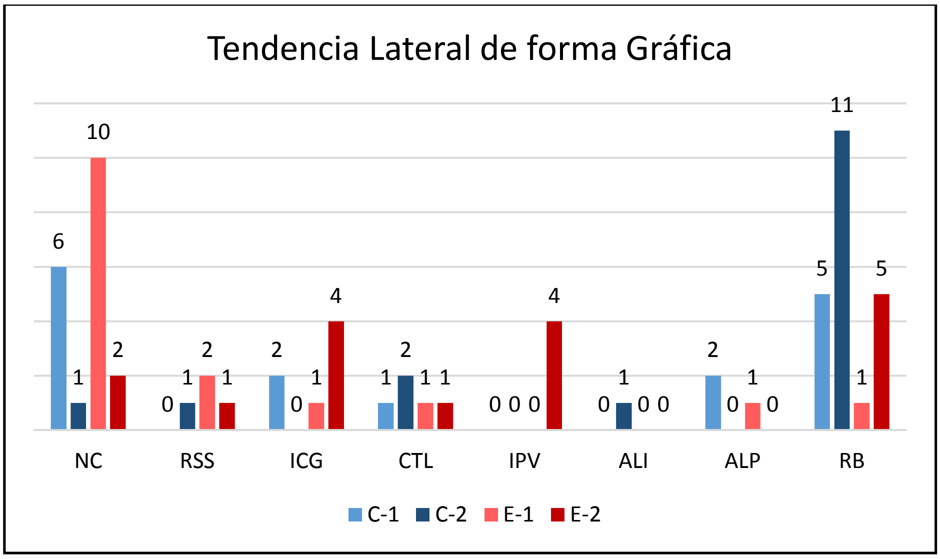



*Ilustración 10: Frecuencias relacionadas con el ítem: análisis de la tendencia lateral en un punto de forma gráfica. Elaboración propia*

Me consta que el docente de dicho grupo ha trabajado la idea intuitiva de límite a través de gráficas por resultar un registro cómodo. En el experimental, a pesar de presentar resultados más modestos, sí que se observa como el número de alumnos que no responden ha decrecido notablemente –creemos que el material gráfico del anexo III ha podido ayudar, aunque también es cierto que un número reducido afirmaron no existencia de límite lateral por ser la función de carácter oscilatorio, que curiosamente es el mismo ejemplo aportado para el caso de no existencia en dicho material-. Las ideas más llamativas de sus razonamientos han sido:

1) *“Lo que pase en el punto no me importa”,* es decir, no asocian límite con imagen (sólo un alumno del grupo de control aludió a este argumento). Esto es debido a que el registro les da abundante información del comportamiento de la función tan cerca como se quiera del valor al que tiende la x.
2) Utilizan con frecuencia expresiones del tipo *“se acerca cada vez más”*, *“se aproxima”* sobre todo en el pre-test, típicas de los modelos intuitivos dinámicos, cuando dicha afirmación no es del todo correcta ya que, en el primer cuestionario, a la derecha del -2 la función es constante y toma el valor del límite en infinidad de puntos. Sí es cierto que la mayoría se ha limitado a poner la respuesta sin justificación.

Para finalizar vamos a exponer algunos errores que hemos detectado:

3) Intercambian el papel de las variables (IPV): 4 discentes del grupo experimental en el pos-test mostraron problemas para entender los dos procesos de límite –uno en el eje x y otro en el de ordenadas- relacionados por la f cuando hallan un límite puntual. Creemos que el enunciado ha podido confundirlos ya que muchos contestaron 1, que es el resultado de hacer $(x \to 1)$. Léase el diálogo 3 (p. 81).
4) Confunden tendencia lateral con tendencia al infinito (CTL): muchos alumnos asocian los límites laterales con tender a $\pm\infty$. Este error no es propio del registro puesto que en el numérico también se han observado casos (debido a problemas de ordenación de decimales). En el grupo experimental no es muy frecuente (1 estudiante) y eso que los límites en el infinito no se han estudiado por falta de tiempo.

Los discentes parecen sentirse cómodos en el registro gráfico sobre todo cuando tienen que leer e interpretar gráficas. Aun así, ello no significa que hayan encapsulado correctamente la noción de límite y mucho menos que controlen las reglas del sistema de representación, tal y como demostraremos en la pregunta 6 donde se les pide que construyan gráficas bajo determinadas condiciones. También pensamos que el hecho de haber propuesto una función continua en el pos-test ha podido resultar favorable para el alumnado, en tanto que entienden mejor las nociones implicadas que en el caso de discontinuidades.

## 3.4 Caracterización del límite por límites lat. de forma algebraica

La pregunta 4 de ambos cuestionarios trata sobre la relación límite-límites laterales en registro algebraico. En general, ambos grupos presentan un nivel de desempeño similar tras la instrucción. Las respuestas sin sentido son relativamente frecuentes (5 alumnos por grupo) motivado básicamente por las dificultades para interpretar funciones definidas a trozos discontinuas.

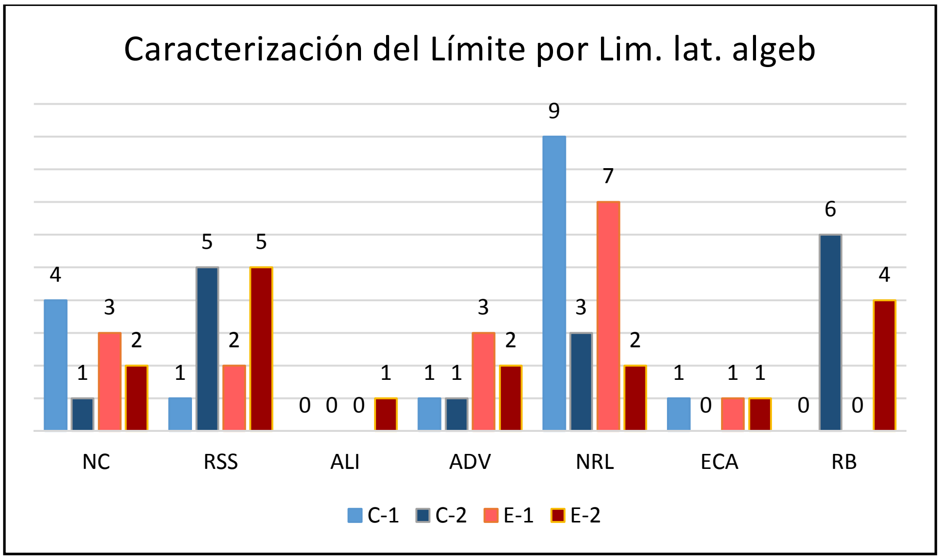



*Ilustración 11: Frecuencias relacionadas con el ítem: caracterización del límite por límites laterales de forma algebraica. Elaboración Propia*

El problema de este tipo de actividades es que si previamente no se analiza la tendencia lateral, no es posible concluir nada. En el pre-test, el límite propuesto consistía en una función racional que involucraba una indeterminación del tipo $\frac{k}{0}$. Como puede observarse en la categoría NRL (realizan cálculos pero no concluyen nada acerca de la relación límite-límites laterales), los alumnos se limitaron a realizar cálculos de todo tipo sin éxito alguno y sin llegar a nada que les permitiese contestar.

Por otro lado, la función del pos-test ha servido para ilustrar numerosos errores de razonamiento, a pesar de que en algunos casos la conclusión a la que se llega es correcta. La relación entre los límites laterales y el límite en su versión más esencial es muy sencilla de comprender y los estudiantes la aplican correctamente. Sólo un número reducido daba diferente valor al límite y a los laterales (ADV), lo cual evidencia una carencia muy profunda de comprensión en cuanto al teorema de caracterización. Resaltar también que ningún sujeto recurría explícitamente a dicho resultado para justificar, lo que puede ser un síntoma de rutina argumental. Pasamos a analizar los errores más destacados:

1) Responden sin sentido (RSS): en esta categoría queremos resaltar un hecho relativamente frecuente y que consiste en que cuando un alumno tiene una función a trozos, realiza los límites laterales para cada rama ignorando la

definición de la misma, lo que evidencia lagunas importantes acerca del sentido de las mismas (véase Ilustración 12 en la que además se ignora por completo el concepto de tendencia ya que utiliza $f(2)$).

Otros casos que podemos enumerar hacen referencia al uso de derivadas para resolver la indeterminación, afirmar que no existe límite y a la vez que vale 1, que la función del enunciado no puede existir ya que "*hay más de un valor de y para otro de x*", o decir que no hay límite porque las funciones de cada límite lateral son diferentes sin realizar ningún cálculo.

2) Utilizan la rama incorrecta: los alumnos se equivocan con el orden de los números y escogen la rama equivocada, véase el diálogo 4 (p. 82).

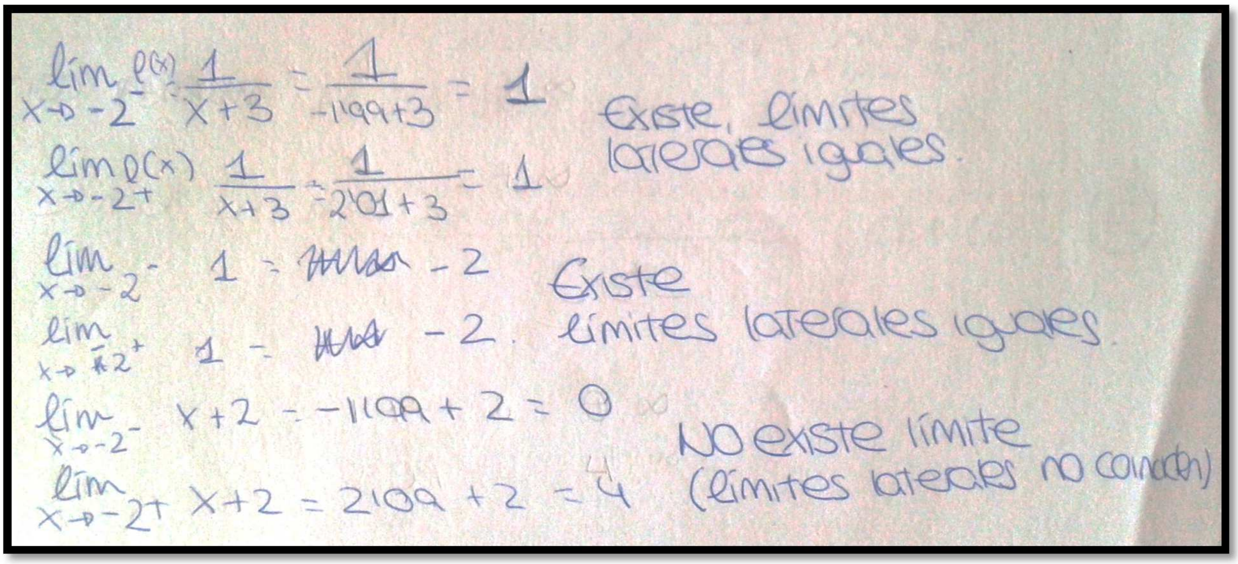



*Ilustración 12: Alumna ignora la definición de la función y halla los límites laterales mediante puntos en el entorno para cada rama (Pos-test, Grupo Experimental)*

Los alumnos de ambos grupos han realizado cálculo algebraico de indeterminaciones utilizando mayormente ejemplos presentados mediante una fórmula (en el experimental sólo se presentaron dos). Hubiese sido más recomendable proponer mayor cantidad de funciones a trozos y calcular la tendencia lateral. Para finalizar el análisis, queremos poner el caso de un estudiante del grupo de control que logra comprender el concepto de discontinuidad evitable (parece ser que lo han estudiado los días previos a la entrevista) y no confunde límite con imagen. Me llama poderosamente la atención cómo dos compañeros del mismo grupo poseen esquemas tan dispares, además de que necesitará recurrir al registro gráfico como apoyo para poder razonar, ya que el algebraico por sí solo no le es suficiente (léase el diálogo 5 p. 84). Como dato, hemos detectado que los discentes de Bachillerato tienen problemas para establecer relaciones entre la tarea y los conceptos involucrados debido a que las imágenes evocadas son pobres y únicamente eficaces para realizar rutinas simples.

## 3.5 Caracterización del límite por límites lat. de forma numérica

La pregunta 5 de ambos tests versa sobre la relación entre límites laterales y límite puntual mediante tablas de valores. Tal y como comentábamos en la cuestión 2, el registro numérico supone una dificultad notoria para la mayoría de alumnos ya que no son capaces de estudiar la tendencia lateral correctamente. La evolución ha sido escasa, aunque sí es cierto que el grupo experimental ha reducido a la mitad el número de alumnos que no contestan.

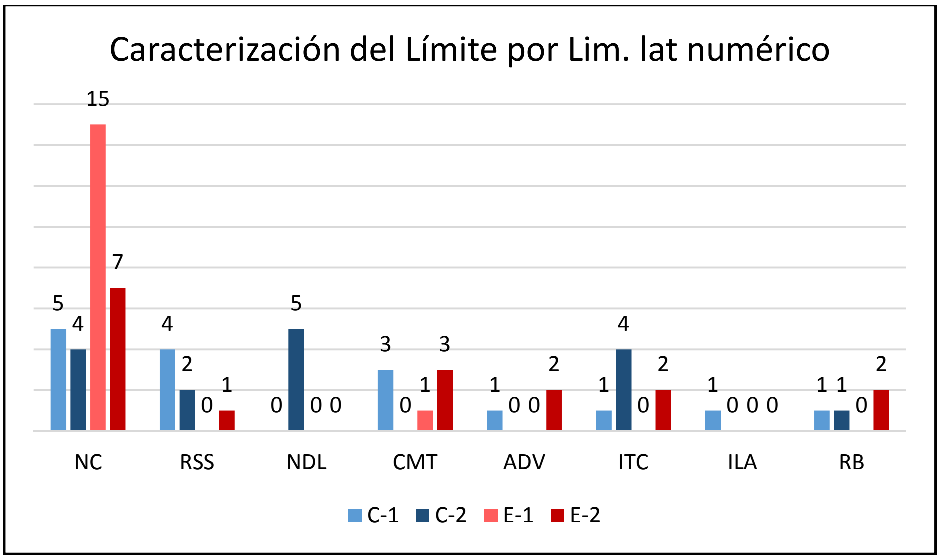



*Ilustración 13: Frecuencias relacionadas con el ítem: caracterización del límite por límites laterales en registro numérico. Elaboración Propia*

En el pre-test casi todo el grupo experimental (15 alumnos) dejó en blanco la tarea. Los resultados del pos-test son similares en ambos por lo que la instrucción no parece haber influido decisivamente.

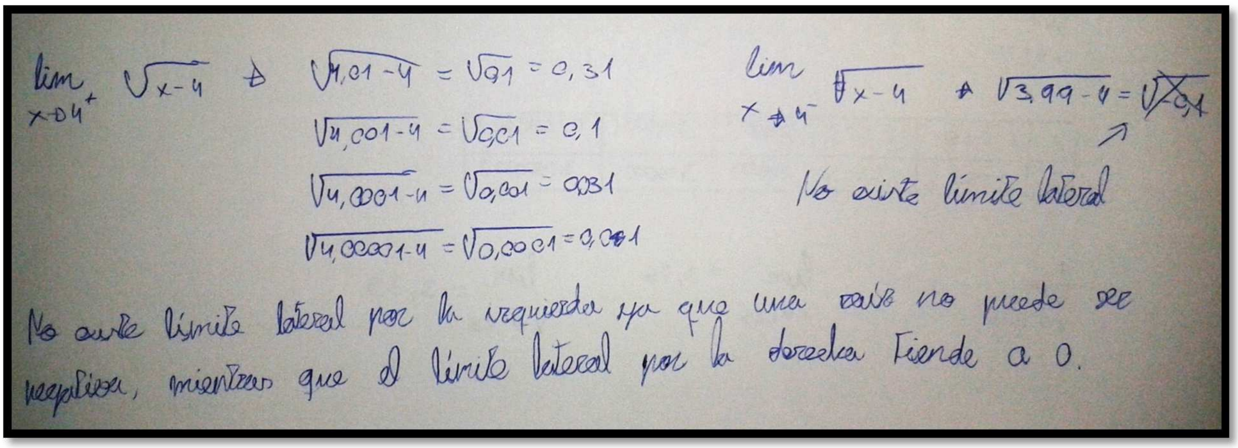



*Ilustración 14: Alumno afirma no existencia de límite por no tener dominio a un lado del punto (Pos-test, Grupo Control)*

El error que hemos observado como más frecuente, especialmente en el grupo de control, es que *asocian no existencia de dominio con no existencia de límite lateral*

*(NDL) (*véase la Ilustración 14*)*. Esta idea considera que cuando una función no está definida a la derecha o la izquierda de un punto tampoco puede haber límite lateral, y no es que no exista, es que no tiene sentido hablar de límite. El ejemplo había sido seleccionado a propósito –una raíz cuadrada- para comprobar si los estudiantes tenían asentada esta imagen conceptual. Un total de 5 estudiantes del grupo de control han contestado erróneamente por dicho motivo. En el experimental hemos trabajado esta idea (véase el fragmento 4 p.96 ) con ejemplos gráficos y se hizo especial mención en el libro de texto. También hemos de comentar que sigue sin usarse explícitamente el teorema de caracterización en las argumentaciones y que al contrario que en el registro algebraico, el número de discentes del grupo de control con el error ADV (asociar valores diferentes al límite y a los límites laterales) es nulo, lo cual puede deberse a cuestiones propias del registro.

## 3.6 Caracterización del límite por límites lat. de forma gráfica

El tópico de la cuestión 6 trata sobre la caracterización del límite mediante los límites laterales de forma gráfica. En el primer test, se facilitó la gráfica de cuatro funciones y debían responder a una pregunta, mientras que en el pos-test, la tarea era de tipo 2 y resultaba de mayor complejidad, ya que se pedía dibujar una gráfica –si era posible- con unas condiciones previas.

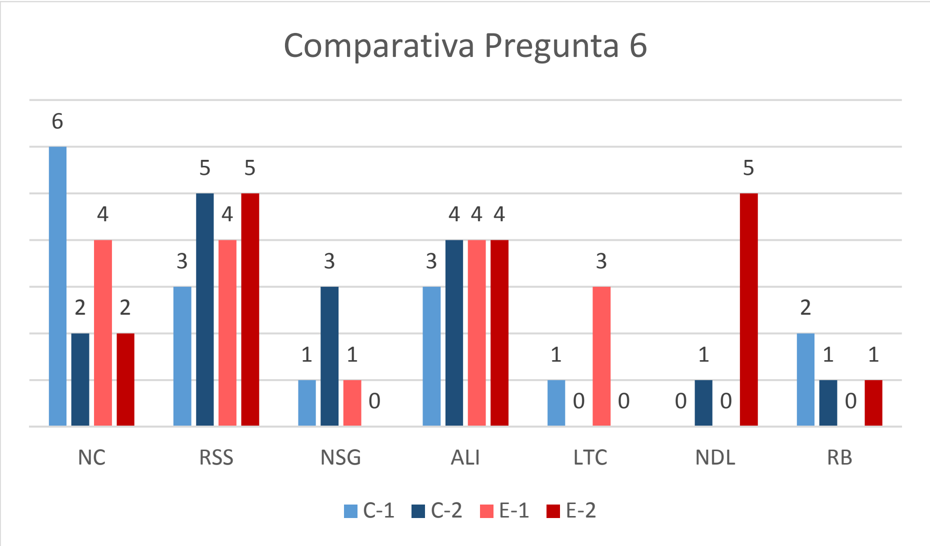



*Ilustración 15: Frecuencias relacionadas con el ítem: caracterización del límite por límites laterales de forma gráfica. Elaboración Propia*

A partir de los resultados expuestos en la Ilustración 15 podemos ver como la evolución ha sido escasa en ambos grupos. En líneas generales las frecuencias han variado poco y el número de alumnos que responden bien es similar antes y después de la instrucción. Destacan notablemente los 5 alumnos del grupo experimental que presentan NDL (afirmar que no existe límite si no existe dominio) cuando en el apartado anterior ninguno manifestaba este error. ¿Cómo podemos explicar este fenómeno? A priori no encontramos una relación causa y efecto plausible, aunque todo parece indicar que el registro semiótico influye, y mucho, en el nivel de desempeño de las tareas. A continuación, detallamos algunos errores detectados:

1) No conocen el concepto de gráfica (NCG): el principal problema que hemos podido constatar es que los alumnos no tienen claro el concepto de función y padecen serias dificultades con el registro gráfico a la hora de representarlas (véase Ilustración 16) ya que curiosamente las leen e interpretan de forma aceptable -como se evidenció en el epígrafe 3.3 de este capítulo- pero no son capaces de conectar otros conceptos como el de dominio, correspondencia... a la hora de traducir las condiciones propuestas en el enunciado. En el grupo experimental se realizó la tarea 13 de la página 43 y los resultados no fueron buenos (véase el fragmento 5 p.96) y eso que el nivel de dificultad era parecido. Entendemos que semejante nivel competencial y de desempeño dista mucho de ser el adecuado para 2º Bachillerato.

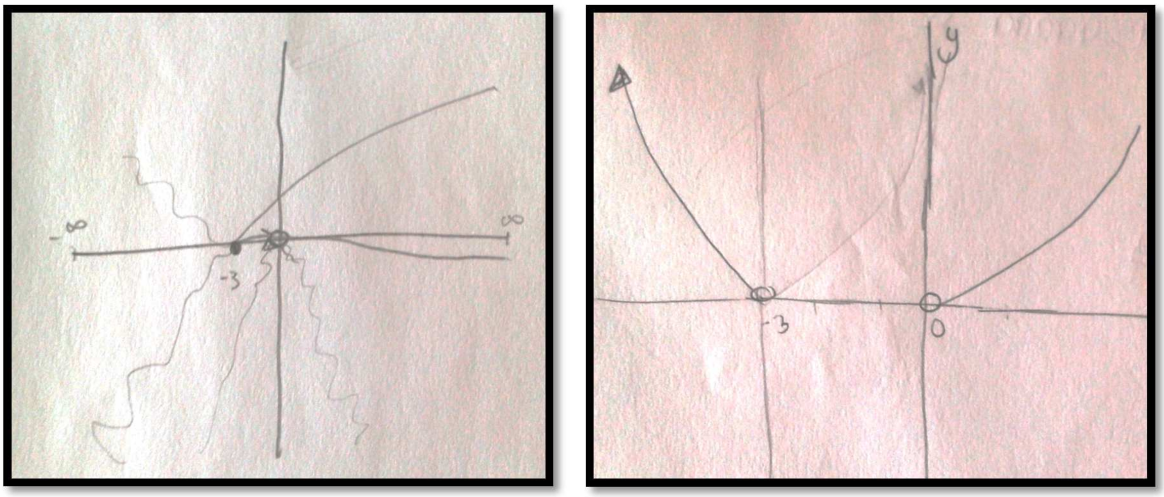



*Ilustración 16: (Izquierda) Esbozo de algo que no es función (Pos-test, Grupo Control) (Derecha) Gráfica correcta que no cumple los requisitos (confunde tendencia lateral con tender a infinito) (Pos-test, Grupo Experimental)*

2) Corte de las asíntotas verticales: muchos estudiantes de ambos grupos respondieron que la función que se pedía no era posible de representar porque las condiciones a) y b) eran incompatibles, o lo que es lo mismo, cuando uno de los límites laterales es infinito, esa función no tiene imagen en el punto. Este error se ha categorizado como ALI (asociar límite con imagen) puesto que es una idea derivada de la misma. Este fenómeno se explica con un sencillo análisis de los ejemplos predominantes de funciones con asíntotas verticales: racionales y logarítmicas. A su vez, es usual explicar el concepto de asíntota vertical mediante una rutina que consiste básicamente en resolver una ecuación –igualar el denominador a cero, en el caso de las racionales- y ver

que el límite puntual es infinito. En el diálogo 6 (p. 85) se explora en detalle este problema y se ofrece una forma de abordarlo y de que logren entender su incoherencia.

3) Responden sin sentido (RSS): en esta categoría encontramos estudiantes que dibujan una gráfica para cada caso, aquellos que afirman que una función con estas características no existe, infieren una expresión algebraica no dada en el enunciado o confunden tendencia lateral con tender al infinito.

*Nota:* La pregunta 7 de los cuestionarios versa sobre el teorema de unicidad del límite, el cual se subdivide en tres subapartados o tópicos cuyo análisis expondremos a continuación. Comentar que el número de alumnos que ha respondido ha sido mínimo, por lo que no nos ha sido posible extraer demasiada información. Creemos que es debido a falta de tiempo, puesto que la tarea 10 se colocó al final y ha sucedido algo similar, aunque también es cierto que en el grupo de control, los temas relacionados con la unicidad y la resolución de problemas no fueron abordados en la instrucción y también puede ser un factor a tener en cuenta, no así en el experimental.

## 3.7 Unicidad del Límite: Funciones distintas con el mismo Límite Puntual

Este ítem trata sobre la posibilidad de que dos funciones distintas puedan tener el mismo límite en un punto prefijado. Los resultados reflejados en la Ilustración 17, no nos permiten dilucidar ninguna evolución o contraste puesto que el porcentaje de estudiantes en cada grupo que no contesta es de entorno al 70%.

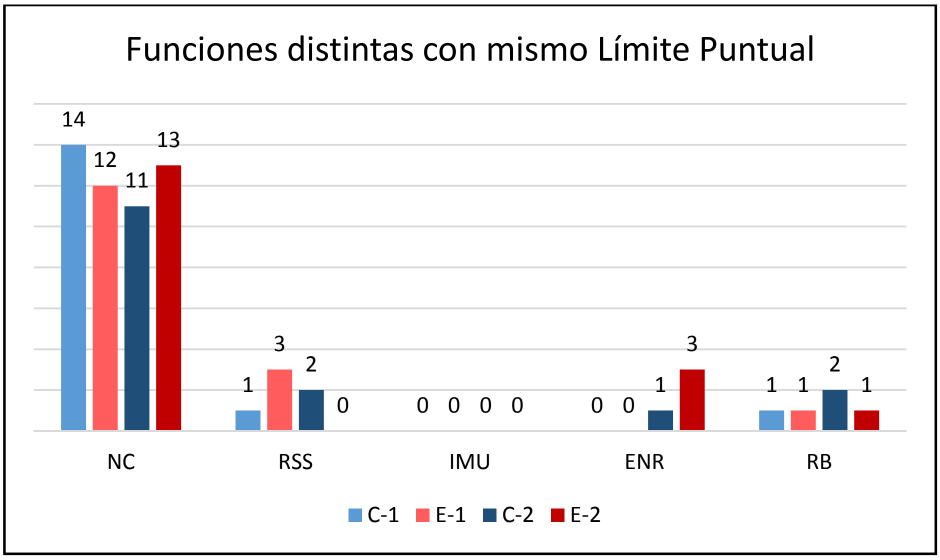



*Ilustración 17: Frecuencias relacionadas con el tópico de unicidad: Dos funciones distintas pueden tener el mismo límite puntual. Elaboración Propia*

De los pocos alumnos que respondieron en ambos tests, ninguno presentó errores conceptuales relacionados con la noción de unicidad de límite (IMU) lo que demuestra que a priori, el teorema se comprende en esencia –es muy sencillo- pero, tal y como sucede en matemáticas y más concretamente en el pensamiento matemático avanzado, la aplicación de dichas ideas en otros contextos no tan directos suele resultar complicada, como es el caso. Por otro lado, la tipología de tarea escogida era la de cuestión teórico-práctica, que siempre requiere de poner en juego mayor número de competencias y conocimientos. Otra de las posibles causas por las cuales los estudiantes no han contestado, es que no comprendían el enunciado o no eran capaces de establecer conexiones de significado entre las discontinuidades evitables y la unicidad. En el diálogo 7 (p. 87) reproducimos el caso de un discente del grupo de control el cual responde correctamente a las cuestiones planteadas.

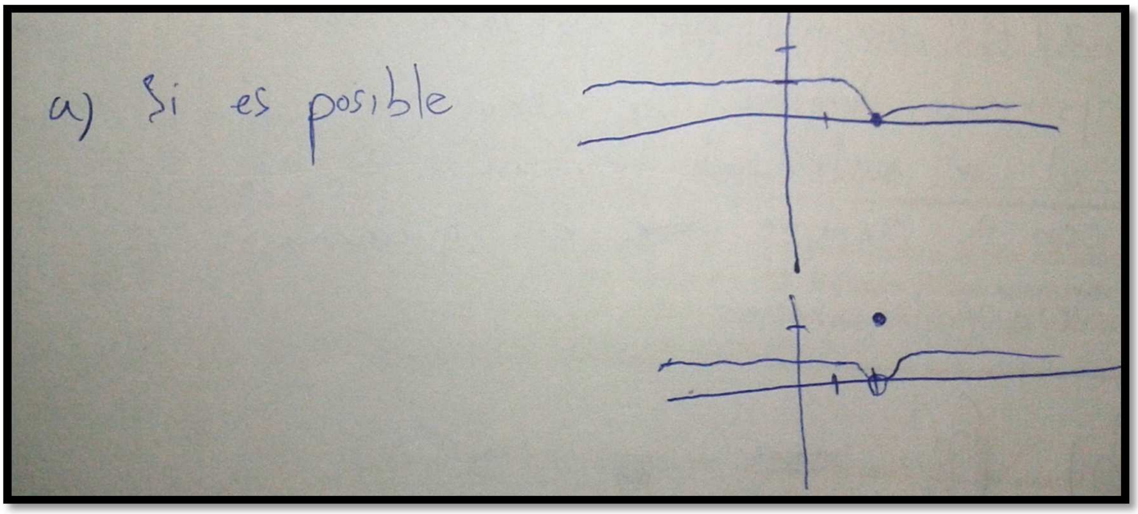



*Ilustración 18: Alumno ofrece dos funciones distintas (continua y discontinua) con el mismo límite en un punto (responde bien). (Pos-test, Grupo Experimental)*

Como conclusión al análisis del tópico queremos subrayar el hecho de que a pesar de haber explicado y trabajado la unicidad del límite con el grupo experimental, el número de respuestas correctas es demasiado exiguo por lo que sería necesario revisar las actividades propuestas y el tiempo dedicado.

## 3.8 Unicidad del Límite: Función con el mismo Límite en varios puntos

De los 3 subapartados en los que hemos dividido el ítem relacionado con la unicidad, el denominado como: *una función puede tener el mismo límite puntual en varios puntos diferentes* ha sido sin lugar a dudas el que mejores resultados ha arrojado, aunque sigue habiendo un alto porcentaje de estudiantes que ni siquiera abordan la tarea. Las frecuencias en IMU (Interpretan mal la noción de unicidad del límite en un punto) siguen siendo nulas lo cual significa que los problemas que poseen los estudiantes para lograr resolver la tarea radican en otras nociones no relacionadas con el teorema de unicidad.

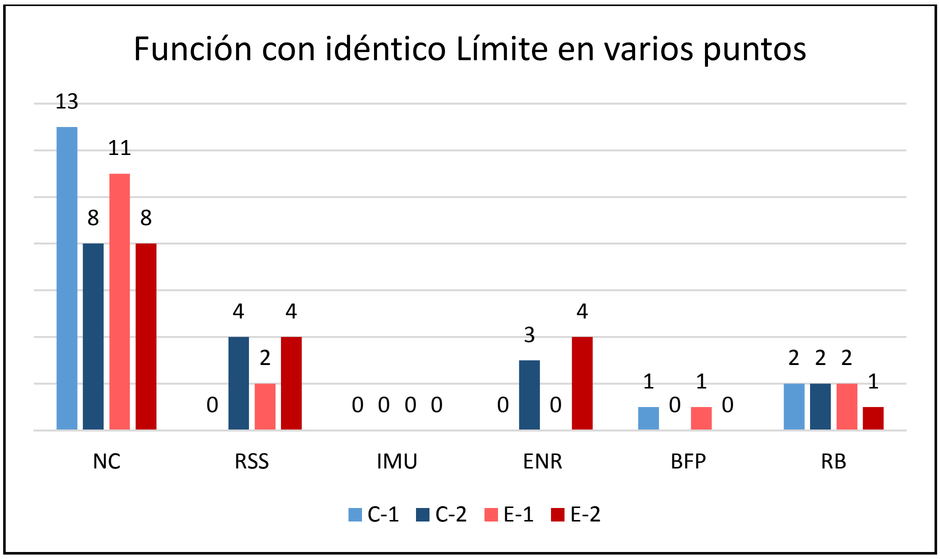



*Ilustración 19: Frecuencias relacionadas con el tópico de unicidad: función con idéntico límite en varios puntos. Elaboración Propia*

Para la pregunta 7-b) que es la que versa en ambos tests sobre el tópico en cuestión, hemos seleccionado la tipología 1 de tarea: dar un ejemplo gráfico o algebraico donde se verifique la posibilidad o imposibilidad de que una función valga un límite predeterminado –se puso primero un valor finito y luego infinito- en puntos distintos. Un dato importante que queremos destacar es que en el pos-test, y tras comprobar las complicaciones que tenían los alumnos a la hora de encontrar expresiones algebraicas –debido a su escaso repertorio y pobre conceptualización- decidí dar libertad para responder en el registro que más cómodo se sintieran. Los alumnos que lo hicieron bien en el pre-test (4 en total) emplearon siempre funciones continuas que suelen resultarles más familiares. Pasamos a analizar los errores o respuestas más llamativas:

1) Los ejemplos aportados no cumplen los requisitos pedidos (ENR): los alumnos ofrecieron respuestas que no se ajustaban a lo pedido. Por poner un ejemplo, tenemos a un alumno del grupo de control que afirmaba que la función tangente tenía límite infinito (positivo) en tres puntos. El discente confunde el concepto de asíntota vertical –es cierto que la tangente tiene infinitas- con que el límite sea infinito, ya que en el caso que nos ocupa, ni siquiera existe por el mero hecho de que por la derecha del punto tiende a infinito positivo y por la izquierda a infinito negativo lo que entra en contradicción con el teorema de caracterización. Confundir existencia de asíntota con límite puntual infinito es un error más frecuente de lo que pensamos y evidencia una falta importante de comprensión de ambos conceptos, motivado por los excesivos ejercicios rutinarios de cálculo carentes de significado.

2) Responden sin sentido (RSS): en este grupo volvemos a detectar respuestas que incluyen “gráficas” pero no precisamente de funciones, lo que demuestra un nivel de desempeño pobre. Existen casos de estudiantes que a pesar de tener bien la idea, ejecutan mal la tarea porque no saben representar una función gráficamente, lo cual nos parece llamativo y alarmante para el curso en el que se encuentran

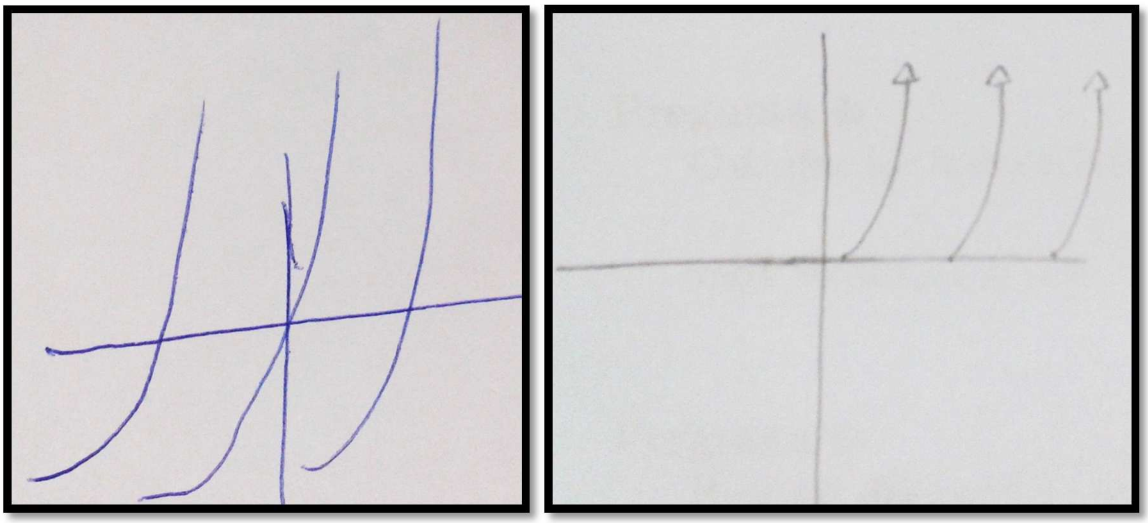


*Ilustración 20: a) (Izquierda) Alumno que pinta algo que no es función b) (Derecha) Alumna confunde asíntota vertical con límite infinito (Pos-test, Grupo Experimental)*

Para finalizar con el análisis, queremos exponer el caso de una alumna del grupo experimental que contestó correctamente a esta pregunta en el pre-test pero no en el pos-test. Su entrevista, recogida en el diálogo 8 (p. 88) muestra los obstáculos y conflictos cognitivos que ha de superar para transformar una imagen mental errónea sobre el infinito, las asíntotas y los límites; lo que supone un escenario ideal para analizar la instrucción del taller y la idoneidad de los ejemplos aportados en el material gráfico, en parte culpables de esta incoherencia.

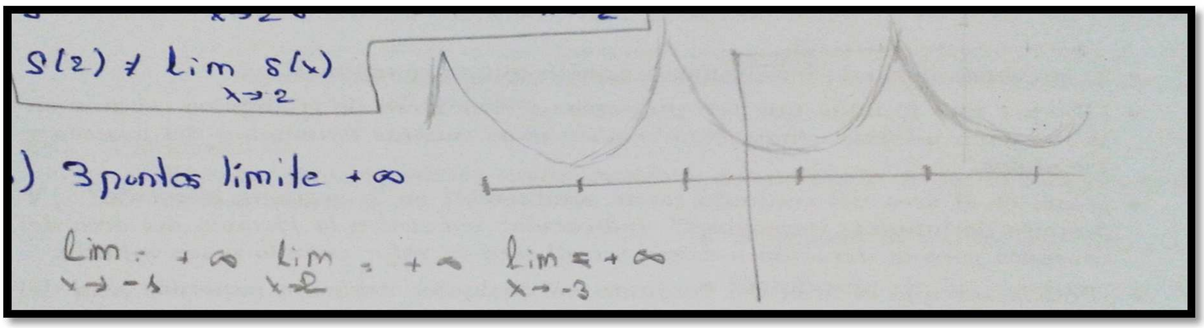



*Ilustración 21: Alumna del grupo de control tiene la idea para resolver la tarea, pero grafica algo que no es función (Pos-test, Grupo Experimental)*

## 3.9 Unicidad del Límite: Funciones distintas con distinto Límite Puntual

Para finalizar con el bloque de unicidad del límite, se preguntó en la cuestión 7-c) si dos funciones distintas pueden tener diferente límite para un punto dado –la respuesta es afirmativa-. Como ya veníamos comentando en los bloques previos, el número de alumnos que no contestan es muy elevado por lo que no es posible establecer hipótesis sobre la influencia de la instrucción. Aunque se pedía una expresión algebraica muchos han optado por emplear el registro gráfico.

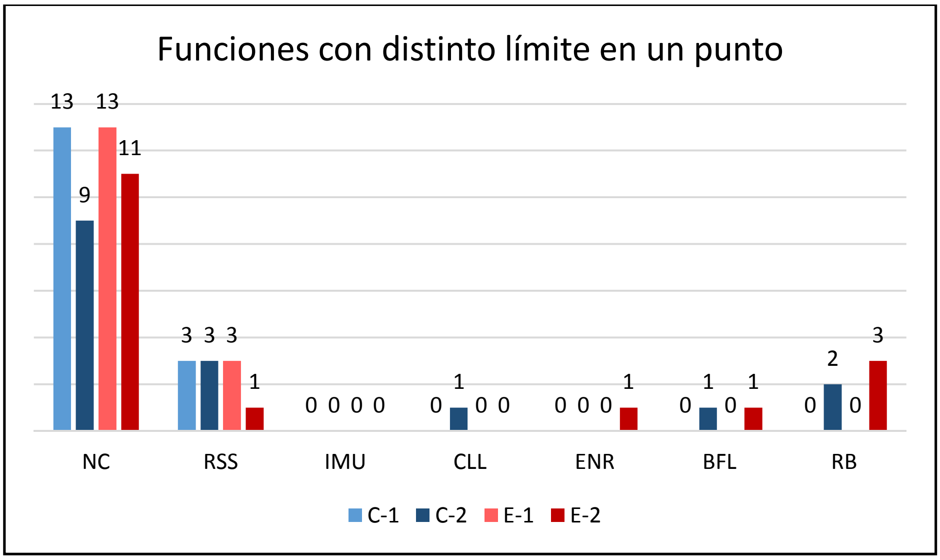



*Ilustración 22: Frecuencias relacionadas con el tópico de unicidad: dos funciones distintas pueden tener distinto límite en un punto. Elaboración Propia*

Con las escasas respuestas analizadas vemos que ningún alumno acude al teorema de unicidad para argüir la no posibilidad. De los estudiantes que afirmaron que era imposible que tal situación se diese –uno del experimental y otro de control-, ninguno ha justificado por qué, sino que se han limitado a poner un *no*.

En la tarea del pre-test, de tipología 2, es decir, una cuestión teórico-práctica, un total de 4 estudiantes, 2 de cada grupo, afirmaron que el enunciado era correcto lo cual supone admitir que límite coincide con imagen siempre.

En cuanto al test final, un alumno de cada grupo considera que una función con distintos límites laterales es equivalente a tener dos funciones con dos valores distintos para el límite en el punto (CLL).

Con los resultados obtenidos en el bloque de unicidad, parece claro que o bien los alumnos no tuvieron tiempo de contestar, o realmente tienen problemas para abordar las tareas, hecho que nos parece llamativo ya que en el grupo experimental, se realizaron todos los problemas del manual, descritos en la página 27 (véase el fragmento del diario 6 p. 97). Aun así es cierto que la falta de estudio y motivación es un aliciente que viene a explicar los malos resultados generales.

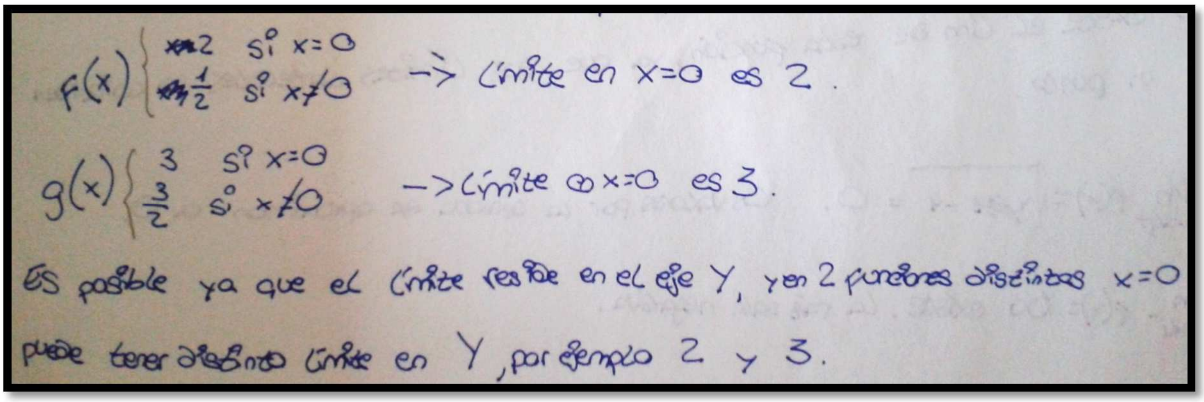



*Ilustración 23: Alumno aporta un ejemplo de dos funciones discontinuas en x=0 e igual límite en dicho punto. (Pos-Test, Grupo Experimental)*

## 3.10 Aplicación en la Resolución de Problemas

La última de las cuestiones que analizaremos en nuestro estudio exploratorio, versa sobre la capacidad de utilizar el concepto de límite en la resolución de problemas enmarcados en diferentes contextos situacionales. Entendemos que dicho tópico aunque sea de carácter transversal, resulta de vital importancia en un sentido competencial –aunque en todos los ítems se trabajan competencias- ya que los alumnos normalmente emplean los límites como herramientas secundarias para calcular otras cosas y no son capaces de ver su potencial.

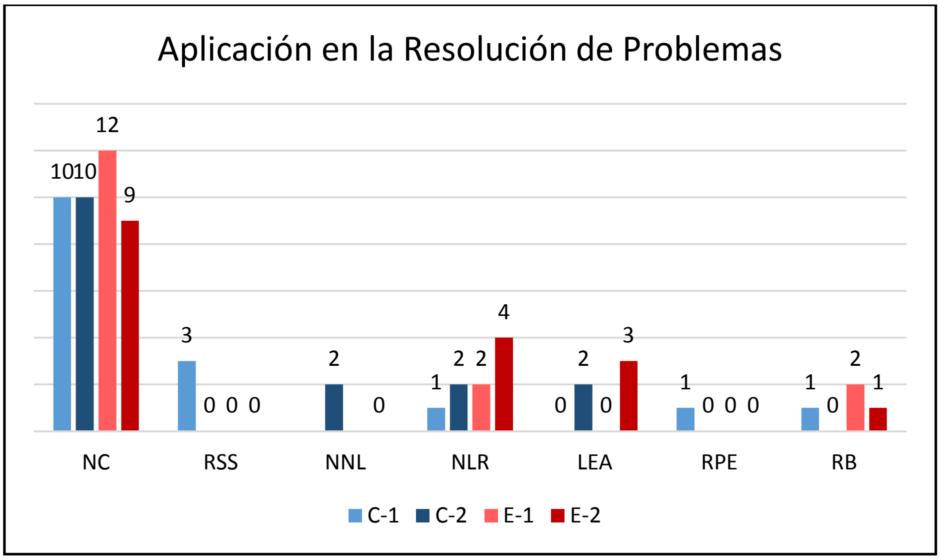



*Ilustración 24: Frecuencias relacionadas con el tópico: aplicación del límite en la resolución de problemas. Elaboración Propia*

La pregunta 10 en ambos casos planteaba dos problemas geométricos: en el pre-test es el conocido método de exhaución para aproximar el área de un círculo y en el pos-test el triángulo de Sierpinski –un fractal-. Las frecuencias evidencian un alto número de alumnos que no abordan la tarea, aunque en el grupo experimental, se ha reducido en 3 alumnos después de la instrucción. De hecho, solamente una estudiante de dicho grupo contestó correctamente, aunque en la entrevista posterior manifestó no comprender correctamente el problema.

Tal y como se observa en el test-final (Anexo II p. 67), dicha tarea constaba de varios apartados. Para el análisis únicamente hemos considerado los puntos primero y cuarto, puesto que para el tercero se dieron indicaciones, mientras que el segundo simplemente pretende servir de ayuda a la hora de calcular el área del conjunto. El problema fue diseñado bajo las indicaciones de Rojas (2008). Los apartados elegidos nos darán información sobre esquemas conceptuales y significados asociados al límite, que es nuestro principal interés. Como dato, comentar que ninguno ha logrado hacer el tercero. A continuación, pasamos a analizar las respuestas:

1) Responden sin sentido (RSS): en el pre-test, 3 alumnos del grupo de control afirmaron que el área del círculo es infinita puesto que cada vez hay más lados en el polígono. Otro discente inventa fórmulas erróneas (véase la Ilustración 25) y además afirma que el área no puede hallarse de forma exacta, lo que se corresponde con ideas propias del modelo no alcanzable de límite.

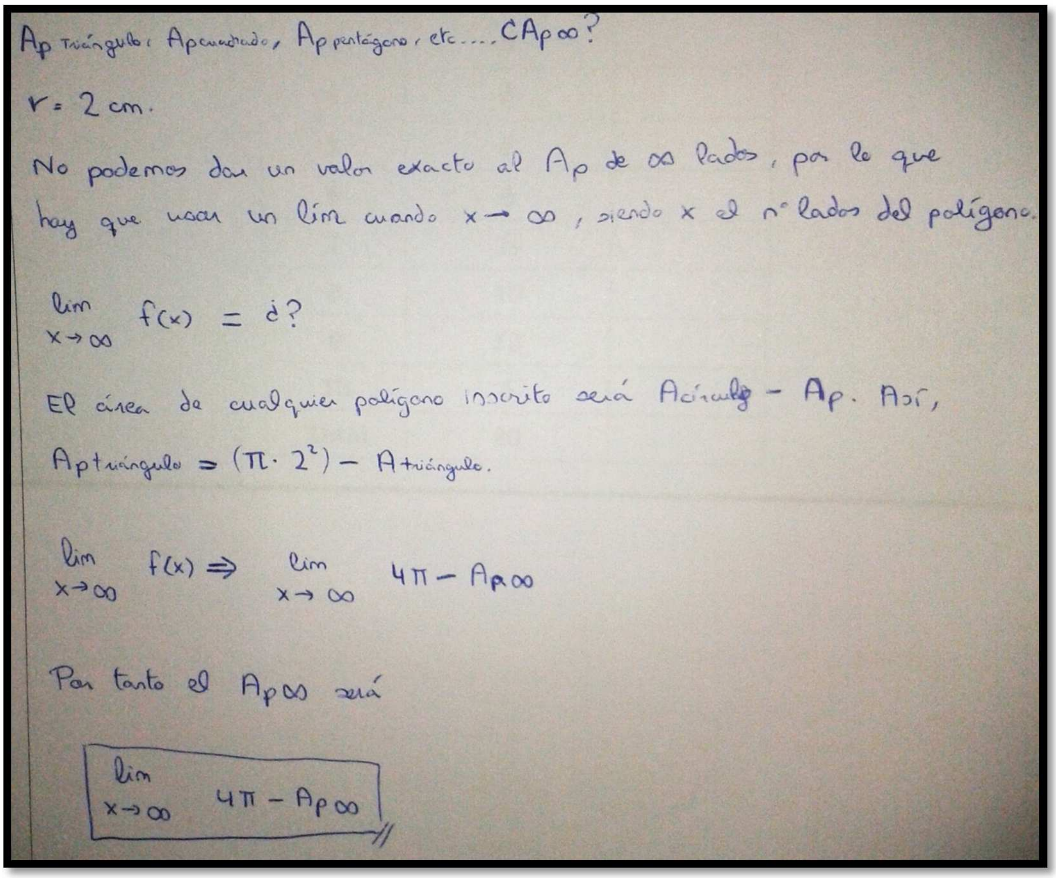



*Ilustración 25: Alumno manifiesta ideas de no alcanzabilidad, y razona incorrectamente. (Pre-Test, Grupo Control)*

2) No utilizan el concepto de límite para resolver el problema (NNL): dos alumnos del grupo de control contestaron a la primera cuestión del pos-test cosas tales

como *"se obtienen varias regiones dentro del triángulo"* y *"seguimos obteniendo un conjunto de triángulos".* Estas respuestas evidencian una conceptualización muy pobre en lo referente a significados matemáticos, ya que los términos *varias* o un *conjunto de triángulos* no hacen referencia explícita al hecho de que el proceso iterativo se repite hasta el infinito. El primer estudiante incluso responde más vagamente al hablar de regiones y no de triángulos, lo que viene a confirmar aún más si cabe sus conceptos difuminados.

3) Perciben nociones implicadas con el concepto de límite, pero no las aplican razonadamente para resolver el problema (NLR): el ejemplo de la Ilustración 25 es un caso claro de estudiante que entiende que hay un proceso de límite implicado, pero no es capaz de emplearlo junto con otras ideas para resolver el problema.

4) Consideran el límite como proceso infinito inacabado y evidencian esquemas dinámicos de límite (LEA): esta idea está muy extendida en los alumnos y supone un obstáculo importante a superar a través de la enseñanza. Viene estrechamente ligada con las ideas de límite como aproximación cada vez mejor a un valor, la confusión entre tender y límite, y sobre todo, se ve afectada por el uso excesivo de situaciones estrictamente monótonas. En el caso del pos-test gran cantidad de estudiantes concluyeron que el conjunto final se asemejaba a cosas tales como *"infinitos triángulos, pero cada vez más pequeños"* (alumno del grupo experimental), *"infinitos triángulos"*… todos ellos muestran dificultades para entender el concepto de infinito actual ya que no son capaces de verlo como un proceso acabado, de ahí que afirmen que el conjunto final tiene una cantidad infinita de triángulos.

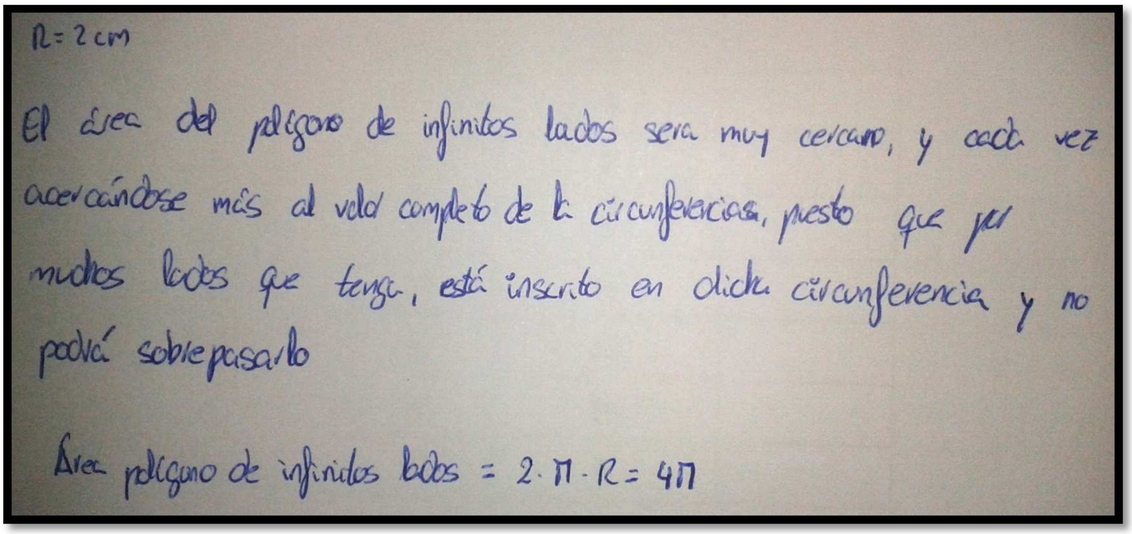



*Ilustración 26: Alumno resuelve bien el problema pero evidencia esquemas de tipo cota superior (Pre-Test, Grupo Control)*

*5)* Resuelven correctamente el problema, pero evidencian errores de conceptualización (RPE): como ha quedado demostrado, cuando las tareas son más exigentes y requieren de nociones propias del PMA, el cerebro activa imágenes concretas del esquema que, aunque pueden resultar incorrectas desde un punto de vista matemático, son factibles y económicas para la resolución de un problema. Esta situación queda ejemplificada en la Ilustración 26 con la respuesta de un estudiante del grupo de control la cual reproducimos parcialmente: *"el área del polígono de infinitos lados será muy cercano y cada vez acercándose más al valor completo de la circunferencia"* algo que no es cierto ya que el área de un polígono de infinitos lados es exactamente el de una circunferencia. El obstáculo que aquí se presenta tiene que ver con entender el límite como un proceso infinito –semejante al ejemplo de la página 9 de este trabajo- por el cual no es capaz de concluir que son iguales y sin embargo más adelante da el valor. Por otra parte, observamos un matiz característico de los modelos intuitivos de cota cuando dice que *"por muchos lados que tenga, está inscrito en dicha circunferencia y no podrá sobrepasarlo".* A ambos esquemas se le añade otro de tipo no alcanzable por el cual se establece una retroalimentación del error: como la sucesión de aproximaciones es por defecto, nunca podrán ser iguales al valor total del área del círculo, y como además tenemos infinitas de ellas ya que podemos añadir cada vez más lados y nunca se es un círculo, se puede concluir que el área de un polígono de infinitos lados es la mejor aproximación del área de un círculo así que es la mejor respuesta posible.

Para finalizar con el análisis del tópico, ofrecemos un fragmento de entrevista realizado a dos alumnos del grupo experimental (diálogo 9 p.90) donde una de las participantes había respondido bien en el pos-test pero durante la conversación nos percatamos de que tenía errores de conceptualización (RPE). Además, incluimos algunas respuestas a las tareas grupales propuestas durante el taller las cuales versaban sobre problemas aplicados (véase el fragmento 7 p. 98). La evolución ha sido poco sustancial debido a la falta de estudio, la dificultad inherente de los términos infinito potencial y actual y el poco tiempo disponible para realizar mayor número de problemas.

## *4 Conclusiones Finales*

Tras la experiencia vivida en el centro escolar y después de analizar los resultados de la investigación, hemos alcanzado las siguientes conclusiones y propuestas futuras para la reflexión.

En cuanto a la pregunta objeto de investigación del trabajo, podemos afirmar que las innovaciones planteadas no han repercutido significativamente en pos de un avance a mejor de las imágenes conceptuales sobre límites. Los motivos han sido varios. El primero de ellos se debe al tiempo, ya que con sólo seis sesiones de clase resultaba imposible lograr semejante avance y más, si se partía de un nivel tan bajo como el demostrado en el pre-test. En segundo lugar, el enfoque metodológico no ha logrado despertar el interés de los alumnos, sumado a que la actividad no era evaluable, ha propiciado que los estudiantes no hayan preparado ni dedicado tiempo suficiente a asimilar y transformar sus concepciones a través de las experiencias propuestas, por lo que es imposible que se constate una progresión. A pesar de todo, sí que es cierto que en los ítems *análisis e identificación de la tendencia lateral en un punto* de forma algebraica y gráfica, se evidencia una leve mejoría, motivado por el hecho de que implícitamente se utiliza en otros tópicos y la tipología de problemas puede resultarles más familiar.

Las inconsistencias que hemos detectado como más frecuentes han sido: el asociar límite con imagen, identificación del límite con un proceso dinámico inacabado (infinito potencial), la no alcanzabilidad o modelos de cota, confundir la tendencia lateral con tender a infinito, uso sinónimo de tender y límite así como no existencia de límite lateral con la de dominio. Éstas vienen motivadas principalmente, por la influencia nefasta de la enseñanza actual, que prima el aspecto del cálculo y deja apartado totalmente la reflexión teórica y los problemas auténticos. A su vez, el uso abusivo de ejemplos similares favorece la aparición de rutinas, a las cuales el alumno se habitúa, por lo que no es capaz de enfrentarse a situaciones novedosas ni se le obliga a elaborar nuevos significados. Por ello, es necesario diversificar los ejercicios que se plantean apostando por las situaciones significativas de aprendizaje contextualizadas.

En otro orden de cosas, hemos observado problemas con los registros de representación vinculados con la transformación y lectura de los mismos con el fin de extraer información para resolver las tareas. Si bien, de los tres, el que presenta un peor nivel de desempeño es el registro numérico, ello es debido a que únicamente utilizan las tablas de valores para la construcción de gráficas, pero no comprenden en sí el uso y normas de funcionamiento del mismo. Además, tiene un protagonismo mínimo. Con respecto al gráfico, constatamos un hecho paradigmático, y es que los discentes saben analizar e interpretar gráficas, pero a la vez, no son capaces de construirlas, o si lo hacen, cometen errores graves. El algebraico no supone un inconveniente si la tarea es operativa (hacen bien las cuentas), sin embargo, sí que se convierte en un obstáculo si se les requiere extraer información implícita (nivel de abstracción pobre).

Con respecto a las innovaciones planteadas en el taller, consideramos que los tópicos *definición de límite de una función en un punto* e *idea de no existencia de límite en el punto* requieren un tiempo significativo y no pueden considerarse como apéndices de la unidad didáctica, sino que deben tener entidad suficiente dentro de ella. A pesar de que el nivel de formalización que requiere es demasiado complejo para un nivel de Bachillerato, insistimos en que lo recomendable sería no claudicar en el intento de llevarlas a cabo, puesto que su estudio ayuda al alumno a entrenar capacidades como la abstracción y a habituarse a los temas del PMA. Una enseñanza basada en la Ecuación 1 resulta más efectiva que la tradicional, enfocada únicamente en el cálculo.

$$Enseñanza = Reflexión\,Teórica + Problemas\,Contextuales + Ejercios\,de\,Rutina$$

**Ecuación 1: Bases didácticas del Límite**

Uno de los principales hándicaps con los que nos hemos topado ha sido el bajo nivel inicial que tenía el grupo clase. Esto es debido a que la enseñanza recibida previamente no ha supuesto un aprendizaje significativo, no sólo en el tema de límites, sino en un sentido competencial y general. Los estudiantes no son capaces de abstraer, categorizar, verificar propiedades, organizar el proceso de resolución de un problema, plantearse preguntas y en definitiva, todo aquello que no esté relacionado con rutinas no excesivamente complejas, ya que como se ha demostrado, también olvidan. La enseñanza Secundaria sigue obviando la relevancia y el papel prioritario que posee el desarrollo y consolidación de las competencias de Niss, en pos de un compendio de técnicas desgajadas y descontextualizadas que ponen el foco en los resultados y la ejecución, más que en las habilidades que se requieren a la hora de aprender matemáticas. En el caso del PMA el problema se agrava, ya que los contenidos y las tareas auténticas requieren de una base consolidada que debe ir incorporando elementos cada vez más complejos conforme se avanza en el proceso de aprendizaje a ritmos más rápidos. Por este motivo, proponemos un posible planteamiento de planificación curricular en el que ante todo prime el aspecto competencial y conceptual frente al tradicional.

1) Aunque el Curriculum actual de las Matemáticas Académicas, que son las que estudian los alumnos que posteriormente van a realizar Bachillerato, no incluye en el bloque de Números y Álgebra las sucesiones, el docente podría diseñar una unidad didáctica consistente en un primer acercamiento a los límites de éstas. Sería interesante que se aprovechase para tratar nociones como el infinito, así como las de tendencia, aproximarse y límite que involucran otros conceptos conocidos por los estudiantes como error absoluto, cotas… A su vez, el desarrollo histórico del límite tiene su cabida aquí, ya que si los discentes desde un primer contacto con el objeto tienen localizadas las ideas

incoherentes e inconsistentes, es menos probable que las incorporen a sus esquemas en cursos posteriores.

El hecho de incluir un estudio exhaustivo de las sucesiones es necesario, debido a que las tablas de valores y los esquemas dinámicos tienen su razón de ser en el tratamiento secuencial. No olvidemos que los límites de funciones no son más que la traslación al continuo o recta real, de la noción discreta de límite de sucesión. Es más, en los cursos de cálculo universitario se comienza con un estudio de las propiedades topológicas de los números reales (valor absoluto, distancia, entorno…), luego se pasa a las sucesiones y sus límites, para finalmente concluir con el estudio de las funciones y los límites funcionales. Esta propuesta tiene su fundamento en el propio desarrollo histórico del objeto matemático.

2) En 1º de Bachillerato sería oportuno comenzar con un pequeño repaso sobre las nociones vistas el curso previo y continuar con la noción de límite de función. Se pueden abordar teóricamente el teorema de unicidad y de caracterización por límites laterales ya que no suelen resultar problemáticos, procurando proponer problemas auténticos y que impliquen reflexión sobre las ideas subyacentes. Se puede hacer hincapié en las operaciones y el cálculo de límites en casos sencillos, ya que es requerido en otros ítems del Currículo. Por ello, entendemos que este curso sería más bien para trabajar las ideas y crear un esquema mental base más coherente, dejando a un lado la nefasta influencia de las rutinas de cálculo.

3) En 2º de Bachillerato pueden abordarse más arduamente las técnicas de cálculo algebraico de cara a la selectividad y estudiar sobre todo los tópicos *definición de límite de una función en un punto* e *idea de no existencia de límite en el punto* como segundo eje central de la unidad didáctica, estableciendo conexiones de significado con lo aprendido previamente y con las nociones de continuidad, de modo que encuentren sentido al proceso recibido durante los tres cursos.

El análisis exploratorio nos ha dejado importantes cuestiones y problemáticas a abordar en futuras investigaciones. Una de ellas puede ser la cuestión del infinito. En los planes de estudio de Secundaria y Bachillerato no se hace mención alguna a este concepto, salvo en el tema del límite. Los estudiantes comienzan a tener contacto con la idea de infinito desde etapas muy tempranas, cuando se cuestionan cosas tales como la cardinalidad de los conjuntos numéricos (naturales y enteros) o el número de dígitos de los irracionales o decimales periódicos. Por eso, es necesario que los profesores investiguen acerca de las imágenes conceptuales de infinito y las trabajen específicamente en clase, con el fin de que no lleguen al cálculo con nociones totalmente difuminadas. Otro problema que hemos detectado es el relacionado con el concepto de función. Los alumnos comienzan estudiándolas gráficamente, pero como cualquier registro de representación, adolece de limitaciones que deben ser superadas mediante el uso de otros como el numérico (tablas de valores) y algebraico. La realidad percibida es que sus esquemas son demasiado proceptuales, es decir, de tanto manipular y operar, han ido asociando cada vez más significados vinculados a dichas técnicas. No olvidemos que el objeto más esencial del análisis matemático es la función, por lo que si la base de este concepto no se tiene suficientemente clara, es casi seguro que derive en problemas mayores.

El período en el centro me ha servido para constatar un hecho recogido en la teoría de la evolución conceptual: *"el cambio conceptual procede mediante modificaciones graduales de un modelo, por la vía acumulativa o por la del cambio […] La segunda puede involucrar cambios en creencias individuales, en la estructura relacional de una teoría marco, o a nivel de un modelo teórico".* Vosniadou (1994) citado en (Tamayo, 2006, p. 46). En nuestro caso, la vía del cambio ha resultado un intento inútil por modificar los esquemas mentales, ya que esta transformación ha de hacerse gradualmente y con el transcurso de los años. Intentar evidenciar con sólo 6 sesiones de taller una progresión sustancial de ideas tan complejas, no deja de ser un proyecto ambicioso pero poco realista. La experiencia ha servido para constatar que como profesores, sólo podemos realizar una contribución parcial al aprendizaje de nuestros alumnos. Ni somos artífices ni podemos manipular y moldear las mentes de los estudiantes con artillería didáctica de más alto nivel. No obstante, no debemos claudicar en la búsqueda de innovaciones que mejoren las condiciones de enseñanza-aprendizaje y por lo tanto faciliten experiencias enriquecedoras. Es probable que de ellas incorpore, en mayor o menor medida, algunos elementos, lo cual puede considerarse como un logro personal.

El Trabajo Fin de Máster lo valoro como muy enriquecedor, ya que me ha aportado nuevas experiencias de aula después del período de prácticas y de todo un año en formación. El MAES me ha ayudado a madurar y cambiar mi perspectiva sobre la docencia, especialmente el Practicum y el TFM. Como progresos constatados, quisiera destacar la nueva visión que he construido sobre la educación en general y la enseñanza de las matemáticas, en particular. He aprendido que enseñar es una profesión en la que continuamente estás aprendiendo, que dar clases no consiste en dedicar unas horas a un tópico concreto para luego evaluarlo, sino que engloba un proceso mucho más complejo estructurado en tres etapas: diseño, implementación y reflexión. La fase de diseño debe ir acompañada de un profundo estudio sobre el objeto en cuestión y su didáctica, basándonos para ello en investigaciones que puedan darnos información sobre dificultades y problemas asociados con los modelos de enseñanza. Es aquí donde hemos de poner en valor las aportaciones de los profesionales universitarios, por lo que es muy importante que el docente tenga acceso a dichas fuentes y no las acoja con escepticismo. En segundo lugar, la implementación, que no es más que todo el período de aula en el que es necesario observar, tomar datos y tener autonomía suficiente para posteriormente valorar la propuesta.

Finalmente, está la reflexión, que si se hace colectivamente resulta mucho más enriquecedora, además de servir para que el profesor se autoevalúe y proponga cambios con los que ir mejorando su propio estilo. Pero no es menos cierto, que para poder transitar por cada una de las etapas es necesario disponer de ciertas competencias y capacidades, sobre todo la de análisis, las cuales se trabajan en las distintas asignaturas del plan de estudios. Para terminar con este apartado, también quisiera resaltar las carencias formativas con las que acabamos el posgrado, en especial la atención a la diversidad, la gestión de nuevas metodologías como el aprendizaje cooperativo en matemáticas o el bilingüismo. A pesar de ello, espero en un futuro no muy lejano tener la oportunidad de abordar líneas de investigación relacionadas con estos temas.

Para concluir, quisiera manifestar el serio riesgo que supone para la educación matemática, las dinámicas propias de la selectividad, una prueba excesivamente rígida en su diseño la cual determina los ritmos en 2º de Bachillerato. Queremos constatar las dificultades que hemos encontrado en algunos centros a la hora de solicitar colaboración. Expresiones del tipo *“en 2º de Bachillerato, los experimentos con gaseosa”* o *“por mí no hay problema, pero no me hago responsable después de cómo quede desencajado el temario”* ponen de manifiesto un celo excesivo por los resultados, asociados al prestigio de los institutos. Sería recomendable que organizaciones especializadas en didáctica de las matemáticas junto con profesores universitarios de la materia y de Bachillerato, realizaran estudios que avalasen una reforma profunda del examen, en los contenidos y la tipología de preguntas. Porque si una cosa ha quedado clara, es que la transición del PME al PMA debe darse a finales de la etapa Secundaria e ir asentándose gradualmente en el Bachillerato aunque esta no sea la realidad predominante. Esperamos que este trabajo, desde su humilde aportación, contribuya a movilizar esos cambios que tanto necesita la enseñanza de las matemáticas en nuestro país.

## 5 Bibliografía

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, & G. P. Moreno Luis, *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (págs. 97-135). Bogotá, Colombia. Obtenido de *http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf#page=105*

Autores Varios. (2016). *Directrices y Orientaciones Generales para las Pruebas de Acceso y Admisión a la Universidad.* Obtenido de Distrito Único Andaluz: *https://www.juntadeandalucia.es/economiayconocimiento/sguit/examanes_anios_anteriores/selectividad/sel_Orientaciones_matematicas.pdf*

Azcárate, C., & Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X*(2), 135-149.

Belmonte, J. L. (2009). *Modelos Intuitivos y Esquema Conceptual del Infinito en estudiantes de Educación Primaria, Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad.* Tesis Doctoral. Salamanca, España: Universidad de Salamanca. Departamento de Didáctica de la Matemática.

Blázquez, S. (1999). Sobre la Noción de Límite en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. *Actas del III SEIEM* (págs. 167-184). Valladolid: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Blázquez, S., & Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula-10*, 119-135.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2000). El concepto de límite en Educación Secundaria. *El futuro del Cálculo Infinitesimal* (págs. 331-354). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2002). Nueva Definición de Límite Funcional. *UNO, 30*, 67-82.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral.* Tesis Doctoral. Bellatera, Barcelona, Cataluña, España.

Colombano, V., & Rodríguez, M. (2010). Propuesta para superar algunos modelos intuitivos no apropiados de límite funcional. *Revista de Educación Matemática, 25*. Obtenido de *http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_25/prop_11.pdf*

De la Barrera, D. (2013). Experiencias docentes. Competencias en límites: esquemas conceptuales y resolución de ejercicios. *Pensamiento Matemático, 3(1).* Obtenido de *http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/vol_III_num_1/exp_doc_2_limites.pdf*

Dreyfus, T. (1985). Advanced Mathematical Thinking Processes. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 25-40). Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Fernández, J. A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto: estudio exploratorio.* Granada: Universidad de Granada. Obtenido de *http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Fernandez%20Plaza_TrabInvTut.pdf*

Fernández, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Rico, L. (2005). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 33*(2), 211-229.

Garbin, S. (2015). Investigar en Pensamiento Matemático Avanzado. En J. Ortiz, & M. Iglesias, *Investigaciones en Educación Matemática. Aportes desde una Unidad de Investigación* (págs. 137-154). Carabobo: Universidad de Carabobo.

González, Ó. A., Lopetegui, M., & Madan, S. (2014). El Concepto de Límite de Cauchy, el cine, la tv y la mecánica newtoniana. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(38), 149-153.

Juter, K. (2006). Limits of functions: Students solving tasks. *Australian Senior Mathematics Journal, 20*(1), 15-30.

Juter, K. (2007). Students' Conceptions of Limits: High Achievers versus Low Achievers. *The Mathematics Enthusiast, 4*(1), 53-65.

Londoño, N., Narro, P., & Yatzil, A. (2005). Indagando sobre el Límite de Funciones desde diferentes registros de representación. En Cinvestav-IPN (Ed.), *El Cálculo y su Enseñanza*, *5*, 91-106. México DF. Obtenido de *http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/P5.bbf0a982b7788f.pdf*

Lupiáñez, J. L. (2002). Reflexiones didácticas sobre la Historia de las Matemáticas. *Suma,* 59-63.

Medina, A. C. (2000). Concepciones Históricas asociadas al Concepto de Límite e Implicaciones Didácticas. *Red Académica (en línea).* Obtenido de *http://www.pedagogica.edu.co/storage/ted/articulos/ted09_08arti.pdf*

Monereo, C. (2003). La evaluación del conocimiento estratégico a través de tareas auténticas. *Pensamiento Educativo, 32*, 71-89.

Moreno, B. (2007). Escuelas de Pensamiento Matemático durante el siglo XIX. *Cuadernos de Docencia-Revista digital de Educación, I*(7), 1-6.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. *3rd Mediterranean conference on mathematical education*, (págs. 115-124). Atenas. Obtenido de *http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve375/1112/docs/KOMkompetenser.pdf*

Rojas, C. J. (2008). Una propuesta para los estándares de límite matemático. *IX Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* VALLEDUPAR: Asociación colombiana de Matemática Educativa. Obtenido de https://core.ac.uk/download/pdf/12341429.pdf

Sánchez Gómez, C., & Contreras de la Fuente, A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: una perspectiva desde la noción de obstáculo. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(1), 73-84.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*(12), 151-169.

Tamayo, Ó. E. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista de Educación y Pedagogía, XVIII*(45), 37-49.

# *Anexo I Cuestionario Inicial*

**Matemáticas II** **Nombre:** ______________________________

**Universidad de Cádiz**

**Test Inicial 2/10/2017**

**Tiempo límite: 60 Minutos** **Profesor:** ______________________________

---

Este test contiene un total de 10 preguntas. Las cuestiones versan sobre nociones relacionadas con el límite de una función en un punto. **El alumno debe responder a las preguntas acompañándola de una justificación razonada**. Se ruega escribir con claridad y limpieza. El uso de calculadora está permitido.

---

**Pregunta 1:**

Hallar el $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y el $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

**Pregunta 2:**

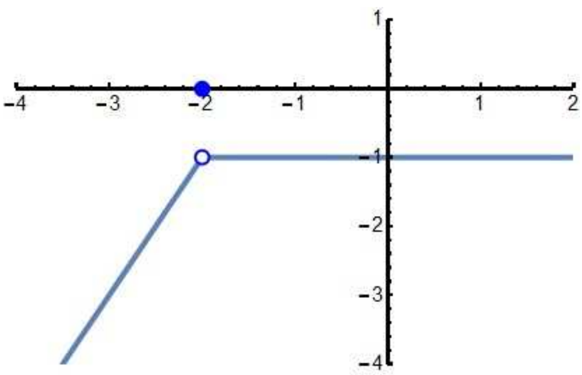
Sugerir el valor de los límites laterales de una determinada función cuando $x \to 1$ empleando la siguiente tabla de valores:

| x | 0.1 | 0.89 | 1.02 | 1.005 | 0.9997 | 1.0001 | 0.999995 | 1.0000002 | 0.99999996 | 1.00000003 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2.5 | 3.59 | 2.41 | 2.7 | 3.01 | 3.0025 | 2.9994 | 3.0001 | 2.99999998 | 3.000001 |

Tabla 1: Tabla de valores

**Pregunta 3:**

Dada la siguiente gráfica, determina los límites laterales de la función cuando x→ - 2



**Pregunta 4:**

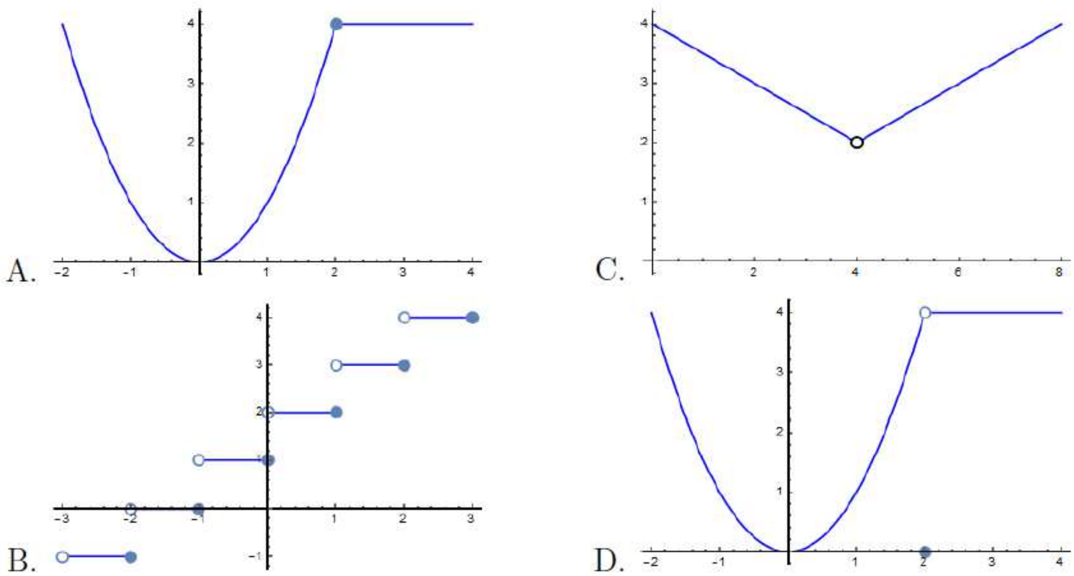
Calcular los límites laterales de la siguiente función cuando $x \to 1$ y concluir **razonadamente** la existencia, así como el valor de $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x}{x^2-1}$

**Pregunta 5:**

Realizar dos tablas que permitan intuir los valores de $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. A continuación, y **razonadamente**, concluir sobre la existencia y el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$

**Pregunta 6:**

Señala cuál o cuáles de las siguientes funciones verifica que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. (Indicación: utilizar la relación límite-límite lateral):




**Pregunta 7:**

a) ¿Sería posible encontrar dos funciones que tuviesen el mismo límite en el punto $x = \frac{3}{2}$? En caso afirmativo, da las **expresiones algebraicas y calcula el valor de dicho límite**. En caso negativo, justifica tu respuesta.

b) Pensemos un problema parecido, ¿podría existir una función cuyo límite en dos puntos distintos $x_1$ y $x_2$ fuese $L = 3$? Esbozar su gráfica y **en caso de no ser posible,** justificar tu respuesta.

c) Argumentar si el siguiente razonamiento es correcto y en caso de no serlo, proponer un contraejemplo gráfico donde se evidencie su falsedad:

*Sabemos que dos funciones $f_1$ y $f_2$ tienen límite y verifican que $f_1(x_0) = f_2(x_0)$. Entonces necesariamente* $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x)$.

**Pregunta 8:**

Realizar una exposición argumentada y acompañada de una ilustración **gráfica** sobre si el siguiente razonamiento es correcto o no.

*Si tomamos una función f, para demostrar que el valor de* $\lim_{x\to 1} f(x) = L$ *basta con tomar un único entorno de L, por ejemplo de radio* $\varepsilon = 2$ *(*$L - 2 \leq f(x) \leq L + 2$*), y ver que para todas las aproximaciones de* $x = 1$ *siendo* $x \neq 1$*, con error menor o igual a* $\delta = 0.005$ *(*$0.995 \leq x \leq 1.005$*), sus imágenes por f se acercan tanto como queramos a L.*

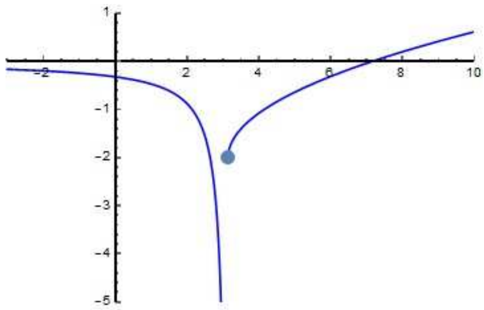
Deben aparecer explícitamente en tu exposición los siguientes aspectos:

- Definición $\varepsilon - \delta$ de límite finito de una función en un punto.
- Significado de los parámetros $\varepsilon - \delta$ (valores que pueden tomar y papel que adquieren en la definición).
- Significado y relación entre la banda centrada en $L$ y el entorno centrado en $x_0$.
- Interpretación del significado del límite en términos de aproximación óptima.

**Pregunta 9:**

Demostrar que $\lim_{x\to\pi} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-\pi} & si \quad x < \pi \\ \sqrt{x-pi} - 2 & si \quad x \geq \pi \end{cases} \neq -\infty.$

Deben aparecer explícitamente en tu exposición los siguientes aspectos:




- Definición $M - \delta$ de que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 6= $-\infty$.
- Significado de los parámetros $M - \delta$ (valores que pueden tomar y papel que adquieren en la definición).
- Significado y relación entre la recta $y = -M$ y el entorno centrado en $x_0$.
- Interpretación del significado en términos de NO tendencia a infinito por aproximaciones cada vez mejores al punto.

**Pregunta 10:**

En la siguiente figura aparecen polígonos regulares inscritos en una circunferencia de radio 2 cm. Si $n$ es el número de lados del polígono inscrito en la circunferencia y $A_p$ es el área de dicho polígono. ¿Cuál será´ el valor del área del polígono de *infinitos* lados? Justificar tu respuesta.

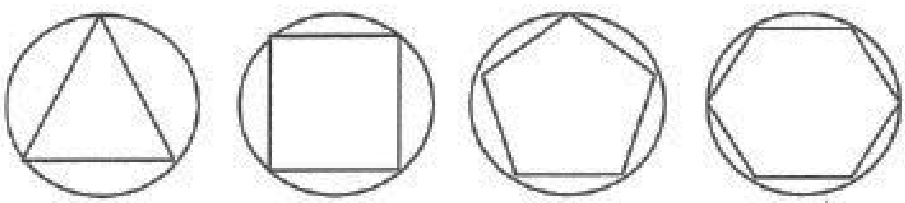


Figura 1: Sucesión de polígonos

## *Anexo II Cuestionario Final*

**Matemáticas II** **Nombre:** ______________________________

**Universidad de Cádiz**

**Test Inicial 17/10/2017**

**Tiempo límite: 60 Minutos** **Profesor:** ______________________________

---

Este test contiene un total de 10 preguntas. Las cuestiones versan sobre nociones relacionadas con el límite de una función en un punto. **El alumno debe responder a las preguntas acompañándola de una justificación razonada**. Se ruega escribir con claridad y limpieza. El uso de calculadora está permitido.

---

**Pregunta 1:**

Hallar el $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ y el $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ de la siguiente función:

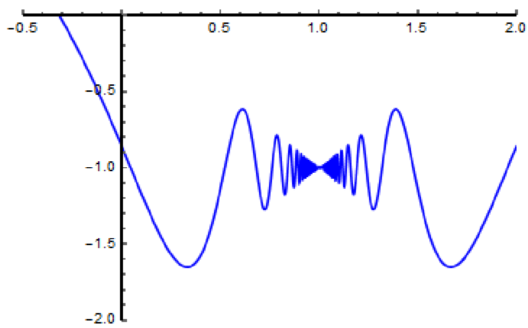
$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ signo(x)\ es\ positivo \\ -1 & si\ signo\ (x)\ es\ negativo \end{cases}$$

**Pregunta 2:**

Realizar dos tablas de valores e intuir $\lim_{x \to 1.25^+} f(x)$ y el $\lim_{x \to 1.25^-} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} 3x & si\ x \neq 1.249999 \\ 0.85 & si\ x = 1.249999 \end{cases}$

**Pregunta 3:**

Dada la siguiente gráfica, determina los límites laterales de la función cuando $x \to 1$:




**Pregunta 4:**

Calcular los límites laterales para luego concluir **razonadamente** la existencia, y el valor de $\lim_{x \to -2} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & si\ x < -2 \\ 1 & si\ x = -2 \\ x+2 & si\ x > -2 \end{cases}$

**Pregunta 5:**

Realizar dos tablas que permitan intuir los valores de $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 4^-} f(x)$. A continuación, y **razonadamente**, concluir sobre la existencia y el valor de $\lim_{x\to 4} f(x)$ siendo $f(x) = \sqrt{x-4}$

**Pregunta 6:**

Dibujar, si es posible, la gráfica de **una función** que cumpla todas las condiciones detalladas a continuación. En caso contrario, razonar por qué no existe dicha función:

a) $(-\infty, 3] \cup (0, +\infty) \in Dom(f)$

b) $\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to -3} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$

**Pregunta 7:**

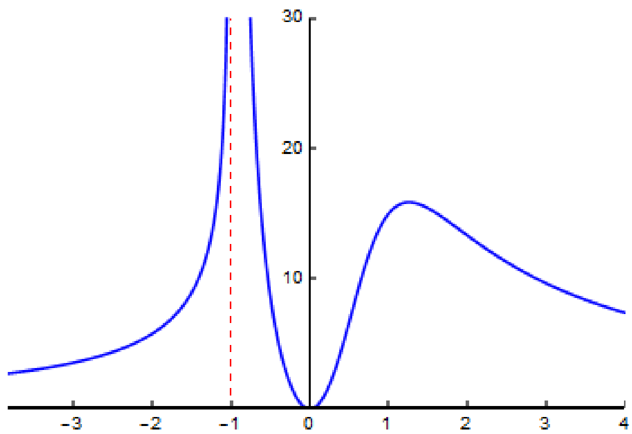
a) ¿Puede una función en la que $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x)$ tener el mismo límite en $x = 2$ que otra función g, tal que $g(2) \neq \lim_{x\to 2} g(x)$? En caso afirmativo poner un ejemplo gráfico de la situación, y si no es posible justificarlo.

b) Dar si es posible, la gráfica de una función tal que tenga límite infinito (positivo), en al menos tres puntos distintos. En caso contrario, justificar la no existencia de dicha función.

c) ¿Pueden dos funciones distintas tener distinto límite en el punto $x = 0$? Dar las expresiones algebraicas de tales funciones, o justificar razonadamente por qué no es posible tal situación.

**Pregunta 8:**

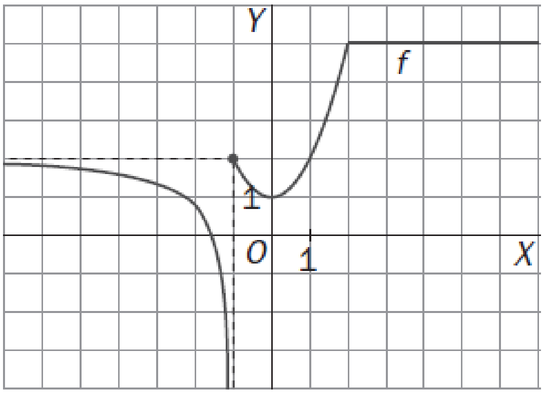
Realizar una exposición argumentada y acompañada de una ilustración gráfica para probar que $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$.




- Definición $M-\delta$ de que $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$
- Significado de los parámetros $M-\delta$ (valores que pueden tomar y papel que adquieren en la definición)
- Significado y relación entre la recta y= M y el entorno centrado en $x_0$
- Interpretación del significado en términos de tendencia a infinito positivo por aproximaciones cada vez mejores al punto.

**Pregunta 9:**

Realizar una exposición argumentada y acompañada de una ilustración gráfica para probar que $\lim_{x \to -1} f(x) \neq 2$




- Definición $\varepsilon - \delta$ de que $\lim_{x \to -1} f(x) \neq 2$
- Significado de los parámetros $\varepsilon - \delta$ (valores que pueden tomar y papel que adquieren en la definición)
- Significado y relación entre la banda centrada en L y el entorno centrado en $x_0$
- Interpretación del significado de no existencia de límite en términos de aproximación óptima.

**Pregunta 10:**

En la siguiente figura tenemos un triángulo equilátero de lado 1cm. A continuación, tomamos los puntos medios de sus lados y los unimos. Veremos que se forman cuatro nuevos triángulos equiláteros de lado 0.5 cm. Quitamos el del centro y con los restantes repetimos la operación de los puntos medios.

*Ilustración 27: Iteración 0, Iteración 1 e Iteración 2*

- Si seguimos iterando infinitamente, ¿qué conjunto se obtiene?
- Obtener una fórmula que nos proporcione el número de triángulos oscuros en la iteración n-ésima. *Indicación: realizar unas cuantas iteraciones del proceso y contar.*
- ¿Cuál es el área del conjunto (zona sombreada) en la segunda iteración? ¿Y después de infinitas iteraciones? *Indicación: encuentra la fórmula del área del conjunto para la iteración n-ésima y averigua cuál será su valor cuando n sea infinito.*
- ¿Podría ser que el área del conjunto en cualquier iteración superase a la del conjunto final? ¿Contradice esto la idea de límite? Razona tu respuesta.

# *Anexo III Material Gráfico*

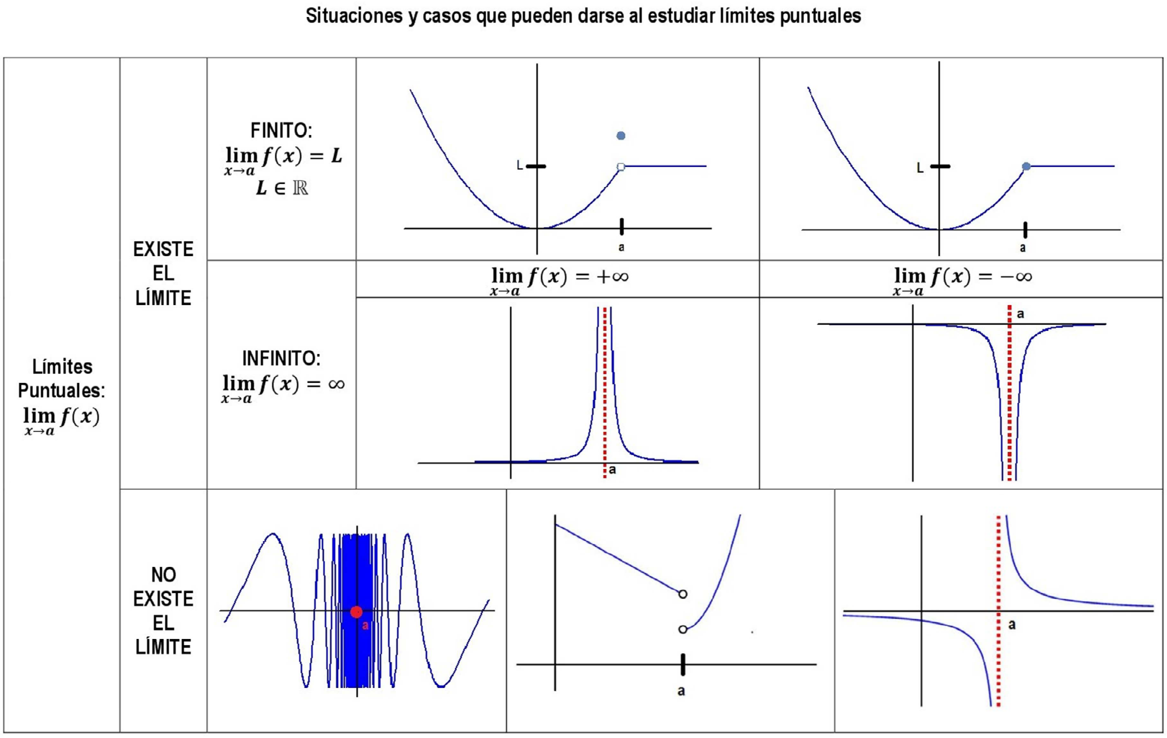



*Ilustración 28: Tabla con los diferentes casos que pueden darse en el estudio de límites puntuales. Elaboración Propia*

# *Anexo IV Tabla Comparativa entre PMA y PME*

| | Etapa Elemental | Etapa Avanzada |
|---|---|---|
| **Estructura de las unidades didácticas** | - Son cortas y en ellas no se presentan diferenciación entre teoría y práctica. | - Mucha información, en poco tiempo y sin ser precedida por una familiarización previa de las nociones que involucra;<br>- Sesiones teóricas separadas de las prácticas, distanciadas en el tiempo y con diferentes profesores. El docente más cualificado imparte la teoría. |
| **Estrategias utilizadas en el aula** | - Resolución de problemas, entre los que están ausentes los pedidos de justificación;<br>- Tendencia a las rutinas;<br>- El uso de definiciones se restringe a la descripción de objetos ya conocidos. | - Clases teóricas magistrales centradas en teoremas, definiciones y aplicaciones;<br>- La demostración formal sustituye a la explicación discursiva;<br>- En las clases prácticas, los problemas para resolver son sustituidos por problemas para demostrar;<br>- Se exige implícitamente el uso de rutinas pero no se fomenta. |
| **Dispositivos didácticos** | - Libros de texto, fichas de trabajo… que el profesor sigue literalmente, muy procesados para que puedan ser usados por el alumno y conteniendo toda la información requerida. | - Se sugieren libros de textos, el profesor no los sigue estrictamente;<br>- El alumno produce su propio material, el cual debe completar buscando información. |
| **Roles del profesor y los alumnos** | - Profesor: responsable del aprendizaje del alumno;<br>- Alumno: alcanza con que siga la clase y haga lo que el profesor le indique. | - Alumnos: son responsables de su aprendizaje, deben ampliar el horario de estudio fuera del aula, encontrar un equilibrio entre saberes teóricos y prácticos y ser capaces de comunicar su conocimiento;<br>- Profesor: guía una parte del proceso. |
| **Evaluación** | - Exámenes parciales complementados con otras aportaciones como la observación y tareas domiciliarias;<br>- En las pruebas se pide reproducir lo hecho en clase con escasa exigencia de justificaciones;<br>- La evaluación tiende a integrarse en el propio proceso de enseñanza. | - Exámenes finales de la materia donde se pide resolución de problemas poco rutinarios y con escasa presencia de cuestiones relacionadas con la teoría;<br>- Distanciada del proceso (al final). Las clases son sólo una ayuda o complemento dentro del proceso de estudio –siendo éste el objeto de evaluación-. |

*Tabla 2: Diferencias entre PME y PMA tomado de (Garbin, 2015, p. 141)*

# *Anexo V Categorías de Respuesta*

1. *Análisis e identificación de la tendencia lateral en un punto (TLP):*

*1.1 En registro algebraico (TLPA):*

1) No contestan (NC)
2) Responden sin sentido (RSS)
3) Interpretan mal la expresión algebraica (IMA)
4) Confunden tendencia lateral con tender a $\pm\infty$ (CTL)
5) Asocian el límite lateral con la definición de la función en el punto (ALI)
6) Asocian el límite lateral con el valor de la función en un punto cercano (ALP)
7) Observan correctamente los valores de x a considerar aunque cometen errores de cálculo (OBE)
8) Calculan correctamente los límites laterales de la función en dicho punto (RB)

*1.2 En registro numérico (TLPN):*

1) No contestan (NC)
2) Responden sin sentido (RSS)
3) Confunden tendencia lateral con tender a $\pm\infty$ (CTL)
4) Confunden el orden de los números decimales con añadir más cifras (COD)
5) Observan los valores adecuados de x pero se equivocan en las imágenes (OXY)
6) Asocian los valores adecuados de x y sugieren correctamente los límites laterales (RB)

*1.3 En registro gráfico (TLPG):*

1) No contestan (NC)
2) Responden sin sentido (RSS)
3) Interpretan incorrectamente la gráfica (ICG)
4) Confunden tendencia lateral con tender a $\pm\infty$ (CTL)
5) Invierten el papel de las variables (IPV)
6) Asocian el límite lateral con la definición de la función en el punto (ALI)

7) Asocian el límite lateral con el valor de la función en un punto cercano (ALP)
8) Determinan correctamente el valor de los límites laterales observando la gráfica (RB)

2. *Caracterización del límite en un punto a través de los límites laterales (CLL):*

*2.1 En registro algebraico (CLLA):*

1) No contestan (NC)
2) Responden sin sentido (RSS)
3) Asocian límite con imagen (ALI)
4) Asignan valores diferentes a los límites laterales y al límite (ADV)
5) Realizan cálculos pero no concluyen acerca de la relación entre límite y límites laterales (NRL)
6) Cometen errores de cálculo pero razonan bien la relación entre límite y límites laterales (ECA)
7) Concluyen correctamente acerca de la existencia de límite y en caso afirmativo, sobre su valor, mediante la relación límite-límites laterales (RB)

*2.2 En registro numérico (CLLN):*

1) No contestan (NC)
2) Responden sin sentido (RSS)
3) Asocian no existencia de dominio con no existencia de límite (NDL)
4) Construyen mal las tablas (CMT)
5) Asignan valores diferentes a los límites laterales y al límite (ADV)
6) Intuyen el límite correctamente pero no recurren al teorema de caracterización para justificar (ITC)
7) Proponen un valor incorrecto para el límite, aunque justifican adecuadamente empleando el teorema de caracterización (ILA)
8) Interpretan correctamente las tablas, proponen el valor del límite adecuadamente y lo justifican bien (RB)

*2.3 En registro gráfico (CLLG):*

1) No contestan (NC)
2) Responden sin sentido (RSS)
3) No comprenden el concepto de gráfica de una función (NCG)

4) Asocian límite con imagen en el punto (ALI)
5) El límite está correctamente determinado aunque no utilizan el teorema de caracterización para argumentar (LTC)
6) Confunden no existencia de dominio con no existencia de límite lateral (NDL)
7) Identifican correctamente el límite y lo justifican bien (RB)

3. *Unicidad del límite de una función en un punto (ULL):*

   *3.1 Dos funciones distintas pueden tener el mismo límite en el mismo punto:*

   1) No contestan (NC)
   2) Responden sin sentido (RSS)
   3) Interpretan mal la noción de unicidad del límite en un punto (IMU)
   4) Los ejemplos aportados no cumplen los requisitos pedidos (ENR)
   5) Dan las funciones y el límite correctamente (RB)

   *3.2 Una función puede tener el mismo límite en puntos diferentes:*

   1) No contestan (NC)
   2) Responden sin sentido (RSS)
   3) Interpretan mal la noción de unicidad del límite en un punto (IMU)
   4) El ejemplo aportado no cumple los requisitos pedidos (ENR)
   5) Dan una función que cumple los requisitos pero no los puntos (BFP)
   6) Dan bien la función y los puntos (RB)

   *3.3 Dos funciones pueden tener distinto límite en el mismo punto:*

   1) No contestan (NC)
   2) Responden sin sentido (RSS)
   3) Interpretan mal la noción de unicidad del límite en un punto (IMU)
   4) Confunden distintos valores del límite con diferentes valores para los límites laterales (CLL)
   5) Los ejemplos aportados no cumplen los requisitos pedidos (ENR)
   6) Dan correctamente las funciones pero no tienen bien los límites o no los especifican (BFL)
   7) Dan bien las dos funciones y los límites (RB)

4. *Aplicación en la resolución de problemas (ARP)*

   1) No contestan (NC)

2) Responden sin sentido (RSS)
3) No utilizan el concepto de límite para resolver el problema (NNL)
4) Perciben nociones implicadas con el concepto de límite pero no las aplican razonadamente para resolver el problema (NLR)
5) Conciben el límite como un proceso infinito inacabado y evidencian esquemas dinámicos de límite (LEA)
6) Resuelven correctamente el problema pero evidencian errores de conceptualización (RPE)
7) Resuelven el problema satisfactoriamente y lo argumentan bien (RB)

# *Anexo VI Transcripciones de Entrevistas*

La abreviatura "I" hace referencia a intervenciones del investigador y "A" a las del alumno.

## Diálogo 1

Un alumno del grupo de control es entrevistado acerca de cómo calcula los límites laterales en la pregunta 1 y 4 del pos-test, ya que se observa que evalúa la función en puntos cercanos. La conversación gira en torno a esta última cuestión.

A: Cuando tiende por la derecha (se refiere a la derecha de -2), tiende a 1 y por la izquierda a 0 (el alumno emplea la palabra tender como sinónimo de límite. En este caso ambas cosas son iguales y los límites laterales son correctos).

I: ¿Cómo sacas el uno?

A: La primera parte (se refiere a la primera rama) pone que si x es menor que -2 le tenemos que hacer la función $\frac{1}{x+3}$ y si cogemos, por ejemplo, la izquierda, pues tiene que ser menor a ese número (intuyo por lo que dice que cuando quiere calcular el límite lateral por la izquierda debe tomar cualquier sucesión de valores que tiende a -2 y son menores a dicho valor. Luego operar sobre la expresión $\frac{1}{x+3}$).

I: ¿Puedes darme un valor muy cercano al -2 que sea menor?

A: El -1.99 (se equivoca con el orden de los números decimales).

I: ¿Seguro? ¿Quién de los dos está más cerca del cero?

A: ¡Verdad! Quería decir el -2.01.

I: ¿Por qué escoges ese valor?

A: Porque estamos hablando de límites y lo que pase en el propio punto te da igual (entiende el matiz de no alcanzabilidad de la tendencia) lo importante es lo que venga por un lado y por otro, hacia dónde tiende.

I: Entonces tú coges un valor cercano al punto, lo sustituyes en la función y ves que te sale 0.99 y de ahí ¿por qué deduces que el límite lateral es 1? Porque cada vez ponemos más nueves, es decir, tomamos -1.999, el límite vale 0.999 y tú aseguras que eso es 1 ¿Por qué? ¿Redondeas?

A: Aquí (sobre el papel) sólo le di dos valores, pero en la calculadora di un montón y vi que conforme me acercaba más a -2, el valor de la función se acercaba más a 1 (tipología clara de modelo dinámico-teórico).

I: Vale, pues imagínate que en el -0.9…9 (catorce nueves) la función en vez de cero y catorce nueves empieza de repente a valer 4.82. ¿Eso podría pasar?

A: Sí.

I: Entonces estos valores te engañarían ¿no?...

A: Bueno pues probaría hasta los catorce nueves y vería lo que pasa…

I: ¿Vas a estar probando hasta quince nueves? ¿Y si en vez de quince nueves, la función empieza a cambiar en el menos uno y treinta nueves detrás?

A: Ya veo…

I: ¿Entonces cómo tienes certeza de que el límite vale 1 simplemente sabiendo lo que ocurre en algunos puntos de alrededor si no sabes a priori que esta función pueda dar un tumbo en otro punto mucho más cerca de lo que tú piensas?

A: No tengo certeza (se da cuenta de la inconsistencia de su esquema).

I: Entonces ¿crees que esto sirve para hallar límites laterales?

A: Para hallarlos no, pero para hacerte una idea sí (se resiste a desecharlo puesto que le ha servido en multitud de ocasiones).

I: ¿Te funciona bien normalmente?

A: Sí (eso es debido a un exceso de funciones monótonas en los ejemplos que trabaja).

I: ¿Y qué vas a hacer cuando no funcione?

A: Pues en ese caso pintaría la gráfica (necesita recurrir a un registro donde calcular los límites laterales es sencillo).

A partir de aquí se le pide al alumno que dibuje la gráfica de $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ y es capaz de pintar el seno por un lado y $\frac{1}{x}$ por otro, pero no la composición. Le invito a que pruebe su método para calcular $\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$ y no es capaz de determinar su valor puesto que es oscilante (él no sabe la forma de la gráfica ya que se empeña en dar más valores al no observar una tendencia clara).

## Diálogo 2

Un alumno del grupo de control parece responder bien a la pregunta 2 del pos-test y cuando se le hace reflexionar sobre la tendencia razona correctamente, pero en la cuestión 4 evidencia una incoherencia (probablemente debida al registro).

I: (Señalando la tabla) has tomado correctamente valores que tienden a 1.25 (nunca toma $x = 1.25$) y evaluando la función intuyes (en su respuesta no aparece la palabra intuir sino que afirma que el límite lateral toma cierto valor) que el límite por la derecha es 3.75.

A: Sí.

I: Veamos por la izquierda. Está bien construida la tabla, pero concluyes igualmente que el límite por la derecha es 3.75 y sin embargo no has tenido en cuenta este valor (ha incluido el 0.85 cuando x=1.249999 en su tabla). ¿Por qué?

A: Lo he visto, primero pensé que era algo raro pero después dije, puedo acercarme más a 1.25 y puedo ignorarlo.

I: Muy bien. Entonces parece claro que si nos acercamos más al punto puede cambiar la tendencia. Entonces ¿por qué en la pregunta 4 para calcular los límites laterales das valores alrededor del punto? Puede que yo tome otros más cercanos y cambie la tendencia totalmente.

A: Sí, pero yo observo una tendencia.

I: Efectivamente (la función se va aproximando a 1 o a 0), pero en el -2.0…01 (ocho ceros) podría empezar a valer 8.4 ¿no?

A. Ya…

I: ¿Te sirve este método para calcular límites?

A: Con seguridad no, me sirve para aproximarlo (se resiste a abandonar la idea) pero no tengo seguridad.

I: ¿Y por qué lo usas?

A: Porque no tengo otro.

## Diálogo 3

Se le pregunta a una alumna del grupo experimental sobre la cuestión 3 del pos-test. Se observa la típica técnica de los valores aislados en el entorno del punto para justificar además de problemas para entender los dos procesos de límite implicados.

I: ¿Cómo has deducido el valor de los límites laterales?

A: Te pregunta por los valores cuando x=1 (no entiendo bien que quiere decir).

I: Cuando x=1 no, cuando x tiende a 1. ¿Qué significa tender? (quiero ver si tiene bien conceptualizada la noción de tendencia).

A: Se acerca al valor pero no lo toma (se refiere a que no lo alcanza).

I: ¿Cuánto se puede acercar?

A: Infinito.

I: (Le ayudo porque veo que tiene flases, pero no es capaz de enunciar correctamente la definición) Tanto como se quiera, un poquito menos…

A: Tanto como se quiera.

I: Entonces ¿Cuánto valen los límites laterales?

A: Pues por la derecha puedes tomar un valor que se vaya acercando a 1, por ejemplo 1.1, 1.0001… No toca al 1.

I: Entonces, el límite de esta función (lo enfatizo) según tú vale 1. Lo ves en la gráfica ¿no?

A: Sí (esta chica tiene un nivel de desempeño muy pobre en la tarea. En clase se han trabajado numerosos ejercicios, pero no parece haber entendido bien las explicaciones).

I: Te has fijado en el entorno del punto y vas acercándote tanto como quieras al 1 ya que x tiende a 1.

A: Sí.

I: Luego, la gráfica que aparece (le señalo el trazo) ¿para qué la usas?

A: A ver, sí, lo que pasa que yo no tengo función en la que sustituir el valor (este comentario es muy revelador puesto que al decir que *no tiene función se* refiere a que no dispone de una expresión algebraica tal y como acostumbra).

I: O sea que no tienes la f(x) correspondiente a esta gráfica (y por eso usa la técnica de los valores aislados y sólo considera el proceso de límite del eje X). ¿Y qué?

A: Yo me fijo en los valores de x más cercanos a 1 e intento averiguar los valores que toma la y (parece que le ha venido un flash).

I: Entonces, ¿la y cuánto vale?

A: -1 (ahora lo dice correctamente).

I: ¿Entonces cuánto valen los límites pedidos?

A: (se ríe) Cundo x tiende a 1, los límites laterales valen -1 (ahora lo dice bien).

## Diálogo 4

Un alumno del grupo de control es preguntado por la cuestión 4. En la conversación se transluce un modelo dinámico de límite, problemas con el significado de derecha e izquierda y el típico caso de asociación de límite con imagen. El uso de valores en un entorno del punto persigue una finalidad distinta, puesto que le sirven para determinar la rama que ha de escoger. Por otro lado, la entrevista saca a relucir importante información acerca de esquemas conceptuales erróneos estrechamente vinculados con la noción de discontinuidad evitable.

I: Cuéntame cómo has calculado los límites laterales.

A: A ver, primero me hice una gráfica para ayudarme (está mal esbozada) y me acabo de dar cuenta de que la tengo mal (ha elegido las ramas al contrario).

I: Pues hazlo bien ahora. ¿Cuánto vale el límite por la derecha de -2?

A: Se acercaría a 1.999… (Típica respuesta de esquema dinámico. El lenguaje es un problema menor aunque no lo usan con corrección ya que el límite no se acerca a nada, tiene un valor fijo. Lo que se acerca cada vez más es la sucesión de valores $f(-1.\hat{9})$).

I: ¿Cuánto vale exactamente dicho límite?

A: Al acercarnos por la derecha sería mayor que -2 (se refiere a la x, supongo), sería x+2 (la rama de la función a tomar) y el resultado es 4 (se equivoca en el cálculo).

I: ¿-2+2 igual a 4? (estoy haciendo la sustitución implícitamente)

A: Perdona, es cero.

I: ¿Y por el otro lado (izquierda)?

A: Por la izquierda sería -2.0001 (está mentalmente tomando valores en el entorno del punto para determinar la rama, intuyo) y sería éste (señala la función $\frac{1}{x+3}$).

I: ¿Cuánto vale?

A: Si suprimimos el -2, vale -1 (efectúa la sustitución $x = -2$ en la expresión anterior).

I: Lo de los valores tipo -1.999 o -2.001 ¿para qué lo usas? ¿Para determinar la rama que debes escoger o vas sustituyendo e intuyes el valor del límite? (quiero saber si es una estrategia para ayudarle a establecer un orden numérico en la recta o por el contrario lo utiliza como sus otros compañeros).

A: Para saber qué rama debo tomar.

I: Es que no sé si te has dado cuenta de que cuando calculas $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ me sustituyes el valor $x = -2$ (quiero ver si se produce un conflicto con la noción de tendencia y límite lateral) en la rama $\frac{1}{x+3}$ y cuando $x = -2$ la función vale 1 (le señalo la definición). Es más, $\frac{1}{x+3}$ no está definida para $x = -2$, sino cuando x es menor que -2 y, sin embargo, tú lo enchufas ¿por qué?

A: (silencio) no sé, no tengo ni idea (acaba de encontrar una inconsistencia de la que no era consciente).

I: No sabes, pero lo usas (de hecho las respuestas son correctas) es decir, calculas la imagen de -2 empleando ramas que no están definidas para dicho valor.

I: El profesor suele hacerlo así, sustituyendo…

## Diálogo 5

Comentamos con un alumno del grupo de control la cuestión 4, la cual ha respondido bien. La exploración es similar a la del diálogo 4 pero en este caso, el estudiante argumenta algo mejor con un poco de ayuda.

I: ¿Cómo deduces que el límite por la izquierda de -2 es 1? (lo tiene bien justificado y calculado).

A: Sustituyo simplemente en $\frac{1}{x+3}$ y me da 1.

I: Vale, mi pregunta es, ¿por qué sustituyes el valor del punto si esa función no está definida para -2? Mira (le señalo la rama, e indica $x < -2$).

A: Claro, tú lo sustituyes porque es el valor al que se está aproximando la función (creo que se referirá a la x, y que $f(x) \to 1$ cuando $x \to -2$ por la izquierda).

I: En el punto $x = -2$, la función vale 1 (quiero ver si se confunde, ya que observa que una sucesión de valores $f(x)$ se va acercando a 1, para valores de x a la izquierda del -2, pero por la derecha el límite lateral es 0). Tú quieres calcular el límite por la izquierda, y para ello debemos tomar valores más pequeños que -2 (enfatizo) y me estás usando el -2 para calcular el límite. Mi pregunta es, ¿por qué haces esa sustitución si cuando x vale -2, la función está definida de otra forma (1 en este caso)? (esta última pregunta trata de hacerle ver que si quiere usar el $f(-2)$ para hallar el límite lateral, debe justificarlo).

A: (silencio).

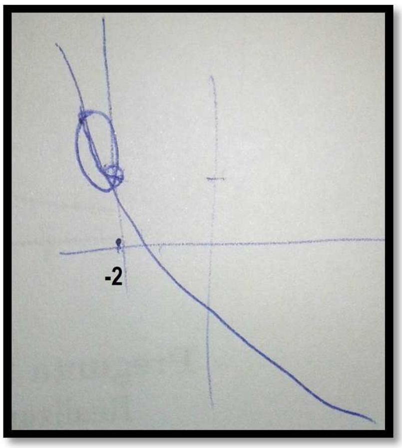



*Ilustración 29: Primer Esbozo. (Pos-test, Grupo Control)*

I: Puedes pintar si quieres (creo que el registro gráfico le ayudará a expresarse mejor y más fácilmente. Dibuja lo que se ve en la Ilustración 29. El alumno a priori no visualiza bien la función del problema pero el objetivo es que logre entender que para justificar su sustitución del punto $x = -2$ en $f(x) = \frac{1}{x+3}$, ha de acudir al concepto de continuidad, así que límite coincide con imagen, aunque $x = -2$ no esté en su dominio).

A: Tenemos la siguiente gráfica. En el -2 vale 1 (se refiere a $f(-2)$) pero después, cuando es menor que -2 vale esto (señala hacia el 1) y aquí termina en un punto… (Le indico que debe ser un globito abierto por el hecho de ser menor estricto). Después, por la derecha hace algo tal que así (señala el trazo) lo que te interesa es este entorno (parte rodeada de la Ilustración 29 que efectivamente se corresponde con la “izquierda” del -2), este espacio que hay acercándose a ese punto. Lo que valga en el propio punto no te interesa (se refiere a -2) porque lo que quieres estudiar es el entorno (el alumno se resiste a asociar límite con imagen pero tiene ideas propias del modelo dinámico-teórico).

I: Mi cuestión es, si te olvidas de lo que pasa en el -2 ¿por qué calculas los límites como la imagen de la rama en dicho punto? ¿Tú crees que la gráfica del ejercicio 4 tiene discontinuidades evitables? ¿ $\frac{1}{x+3}$ es continua en -2?

A: Sí, porque su límite vale 1 y su imagen también. Por otro lado, aquí (señala la rama cuando $x > -2$ la imagen es 0 y hay una discontinuidad en -2 por la derecha, pero estas dos (se refiere a las ramas) son continuas así que el dibujo sería algo más así (en la Ilustración 30, el alumno se da cuenta de que la rama de la izquierda debe acabar en globo cerrado puesto que el límite lateral y la imagen de f coinciden no así por la derecha, que ha de ser abierto. Representa una discontinuidad de salto). Sustituyes porque lo que te interesaría es saber cómo se acerca al punto -2 (aproximación óptima).

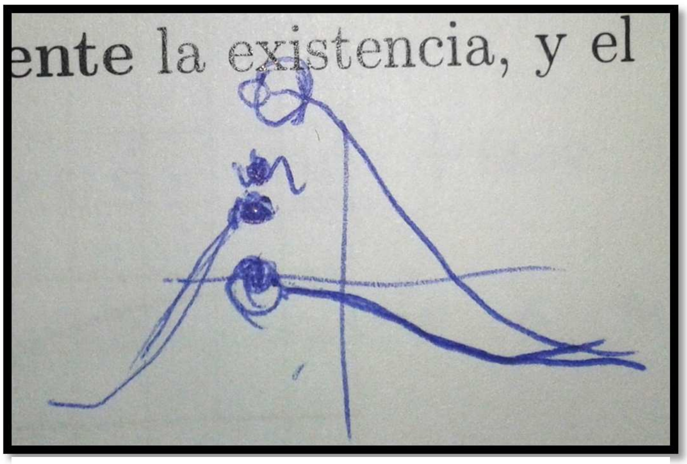



*Ilustración 30: El alumno se da cuenta de la discontinuidad evitable y lo plasma en su esbozo. (Pos-test, Grupo Control)*

I: Entonces, ¿podría ser que cuando tenemos un modelo de hueco, aunque sabemos que no se puede sustituir, sí está justificado su uso puesto que lo único que hacemos es mover la imagen hacia arriba o hacia abajo, y por tanto el límite sería lo mismo que la imagen rellena?

A: Claro.

## Diálogo 6

La entrevista versa sobre la cuestión 6 del pos-test en la que un alumno del grupo de control evidencia una inconsistencia de significado relacionado con las asíntotas verticales. El discente en cuestión había contestado a la pregunta formulada lo siguiente: *"esa función no existe porque el* $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ *no puede ser* $+\infty$ *ya que el punto* $-3$ *está incluido en el dominio, es decir, cuando* $x = -3$ *hay un número real en el eje y, que forma parte de la función. Por lo tanto* $\lim_{x\to -3^-} f(x) \neq +\infty$*."*

I: ¿Por qué dices que el -3 no puede estar en el dominio?

A: Porque como te dice (condición primera) que el $-3$ está incluido (tiene imagen) y también que el límite cuando x tiende a ese punto por la izquierda, zona en la que se acaba la función (quiere decir que el intervalo (-3,0] no forma parte del soporte pero el $(-\infty, 3)$ sí) es $+\infty$, la gráfica tiene que ir creciendo cada vez más y no puede tocar…

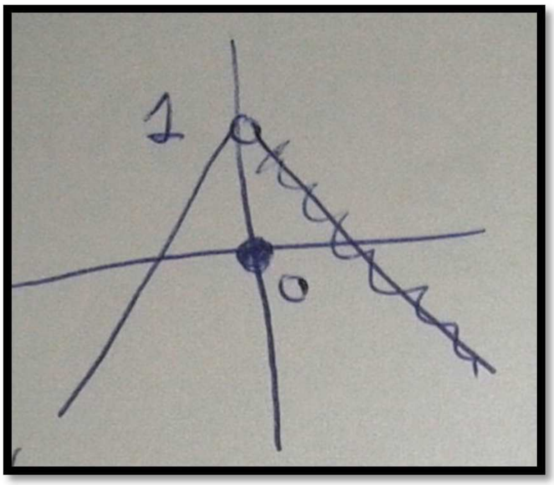



*Ilustración 31: Función de ayuda para entender la inconsistencia (Pos-test, Grupo Control)*

I: Tú dices que si tiene una asíntota no puede tocar nunca (por tocar quiero decir cortar).

A: Sí.

I: Si yo te pongo una función tal como ésta (ver la Ilustración 31), ¿cuánto vale el $\lim_{x \to 0} f(x)$ ? (Le planteé este ejemplo porque límite e imagen son cosas distintas e independientes).

A: Uno. Por los lados la función se aproxima a 1.

I: ¿Y la imagen?

A: Cero.

I: Vamos a borrar este trocito (la parte derecha). Por la izquierda del cero se va acercando al 1 y nunca llega a tocarlo (no se alcanza) pero en el cero hay imagen ¿hay algo mal aquí?

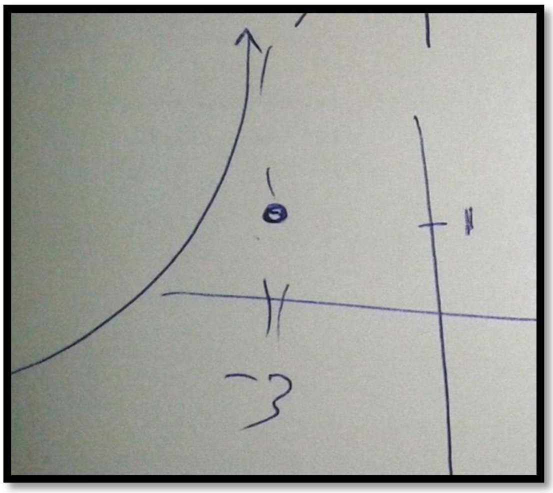



*Ilustración 32: Función pedida en el problema (Pos-test, Grupo control)*

A: (silencio) No.

I: Entonces, ¿esto también sería correcto? (le dibujo lo que aparece en la Ilustración 32)

A: Sí (parece ser que ya se ha percatado de su inconsistencia).

I: ¿Por qué? (quiero que lo justifique para cerciorarme que efectivamente comprende la idea)

A: Aunque la función se vaya a infinito sin llegar a tocar el -3, si pones un punto en la asíntota entonces ya… (Su esquema dinámico-teórico le supone una barrera insalvable con la idea representada en la Ilustración 32. No es capaz de liberarse de la idea límite-imagen puesto que la tiene muy asentada).

I: Si tú quieres calcular un límite gráficamente (le propongo este registro para que intente trasladar la idea de que no le interesa el comportamiento de la función en el propio punto sino en un entorno del mismo) ¿te fijas en lo que ocurre alrededor del punto o en el punto?

A: Alrededor. (Se sigue confirmando la tesis de que el registro gráfico activa distintas imágenes del concepto que permiten sortear ciertos obstáculos).

I: Aquí (señalo el ejercicio) ¿por qué le das importancia al punto?

A: (silencio)

I: ¿Por qué es infinito el límite? (Creo que el problema radica en que el alumno evidencia problemas de compresión con el concepto de infinito y además porque todos los ejemplos que ha estudiado de asíntotas verticales, en dicho punto nunca pertenece al dominio).

A: Sí.

Este problema se ha detectado en varios alumnos y en todos ellos hemos llegado a la conclusión de que el conflicto de significados está motivado por una falta de comprensión del concepto de infinito, ideas enmarcadas en una concepción del límite dinámica-teórica (el límite se asocia con el comportamiento de la función en un entorno del punto y extendida al mismo) y repetición excesiva de funciones racionales y logarítmicas, en las que asíntota vertical va implícito con puntos que no pertenecen al soporte.

## Diálogo 7

Un alumno del grupo de control, el cual había ofrecido un ejemplo adecuado tal y como se requería en la cuestión 7-a) del pos-test es entrevistado y demuestra saber argumentar correctamente su respuesta, lo que denota que comprende el concepto y además no comete el error de asociar límite con imagen, esencial para poder resolver la tarea bien.

I: Según he podido leer en tu respuesta, afirmas que la situación planteada puede darse. ¿Podrías exponer el razonamiento que te llevó a dicha conclusión?

A: En cuanto a la primera cuestión, puse que si el valor de la función en $x = 2$ es igual al $\lim_{x \to 2} f(x)$ eso es un claro ejemplo de función continua (correcto). Haciendo que pasara por el punto (2,1) (se refiere a que $f(2) = 1$) y tomando la otra función con una discontinuidad de salto finito (equivocación. Es evitable) en dicho punto…

I: ¿De salto finito?

A: Evitable, perdón.

I: Correcto.

A: Con una discontinuidad evitable en dicho punto ya conseguiríamos crear la situación pedida. En el ejemplo que puse (véase la Ilustración 33) en la primera gráfica (izquierda), en el punto la imagen vale 1 y su límite también y en cambio en la segunda, el límite sigue siendo 1 pero su imagen ahora es 3,2 (derecha).

I: Vale. Una pregunta que te quiero hacer ¿cuántos valores toma el límite de una función en un punto?

A: Un único valor (es correcto pero no hace mención alguna al teorema de unicidad).

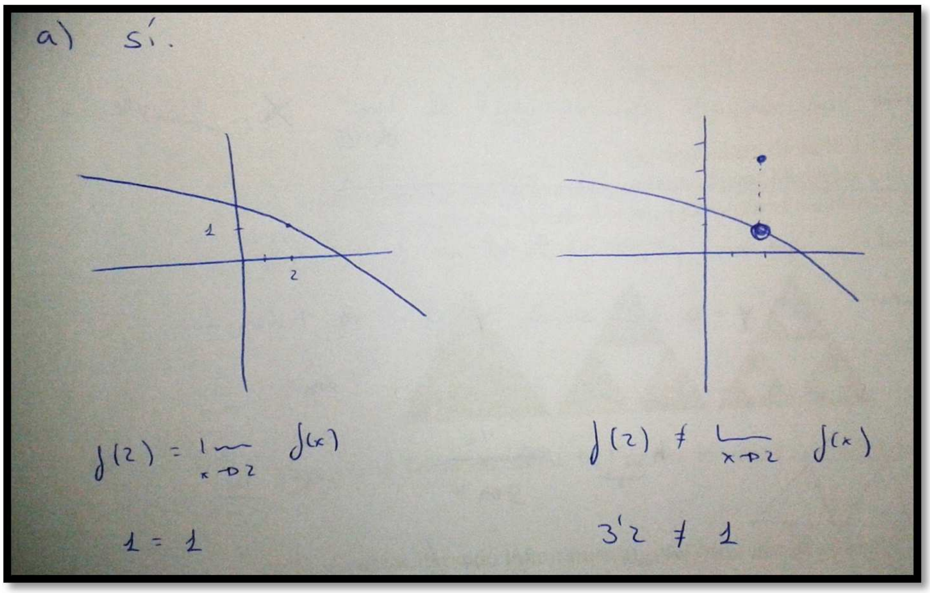



*Ilustración 33: Alumno aporta un ejemplo correcto (Pos-test, Grupo Control)*

I: Y en este caso (el del ejercicio) ¿tú crees que esa noción hace aguas por algún lado? (quiero explorar un poco más a fondo el concepto de unicidad que posee)

A: No, porque simplemente estamos hablando de dos funciones diferentes…

I: Pero hablamos del mismo punto… (Intento ver si cede).

A: Cierto, es el mismo punto pero en lo que a la función se refiere, el límite en ambos casos es el mismo ya que se acerca por la derecha y por la izquierda a ese punto (curioso como para argumentar recurre a otro concepto como es la relación entre límite y límites laterales, además de evidenciar ideas propias de los modelos dinámico-teóricos) sin embargo lo que es el punto real, es decir, la imagen, cambia por el hecho de que una tiene una discontinuidad evitable y la otra no.

## Diálogo 8

Una alumna del grupo experimental responde correctamente en el pre-test a la cuestión 7-b) pero no así en el siguiente cuestionario. Dicho individuo evidencia inconsistencias significativas y conexiones débiles entre conceptos tales como infinito, asíntota vertical y límite.

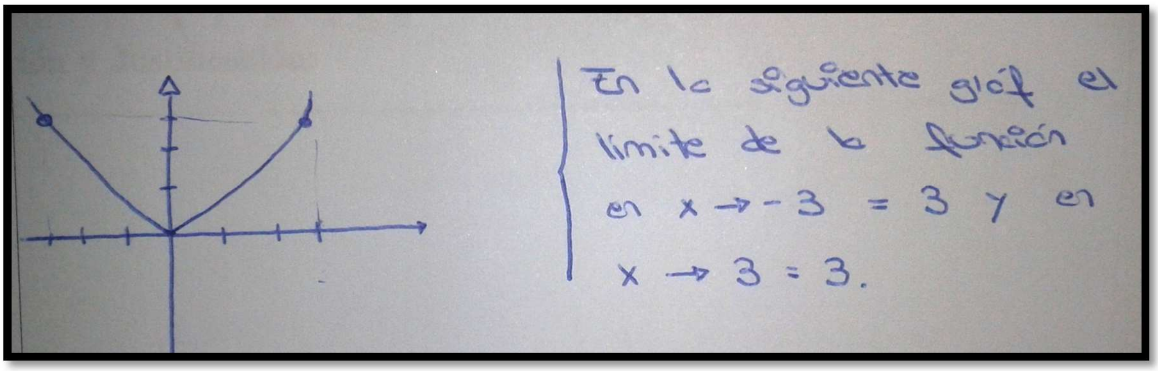



*Ilustración 34: Respuesta correcta de la alumna a la cuestión sobre unicidad del límite apartado b) (Pre-Test, Grupo Experimental)*

I: Según tu respuesta, dices que *"no es posible que existan en la misma gráfica una función con 3 puntos que tienden a +∞"* pero no justificas por qué. ¿Puede ser que no hayas visto nunca una y por eso deduces que no existen?

A: Sí.

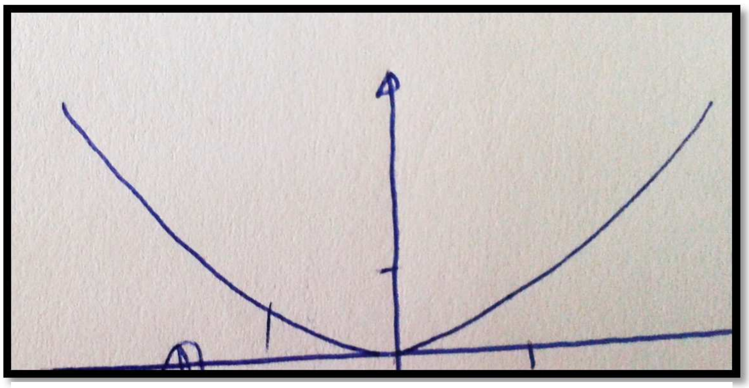


*Ilustración 35: Alumna confunde límite infinito puntual con hacer que la $x \to \infty$ (Pos-Test, Grupo Control)*

I: ¿Me puedes pintar una gráfica de una función con dos asíntotas verticales? (dibuja una especie de parábola, lo cual evidencia no entender lo que es una asíntota ya que, confunde límite puntual infinito con $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$).

I: Esta función tiene dos asíntotas verticales (quiero ver si se da cuenta del error) no pintas nada por la derecha o la izquierda (puede arreglarse de forma sencilla para que se ajuste a los requerimientos solicitados).

A: No es necesario.

I: ¿Con tres?

A: Pues no sé… (Piensa un poco) Sí que se podría… Bueno no, no se puede ¿no?

I: No sé, dímelo tú…

A: Es que yo nunca lo he visto.

I: A ver, según tu respuesta dices que no puede haber 3 puntos tendiendo a $+\infty$. ¿Puede ser porque el límite en un punto sólo tiene un valor? (quiero ver si su conflicto cognitivo está relacionado con la unicidad del límite).

A: Sí, ¿no? (duda)

I: Pero aquí, ¿no estamos hablando de tres distintos?

A: Sí, tengo tres distintos.

I: Luego en cada uno de esos tres (enfatizo) ¿puede ser $+\infty$?

A: (silencio, luego se ríe. Está muy confundida)

I: Vamos a situarnos. Tomemos, por ejemplo en el eje x, los puntos -1, 0 y 1 ¿puede ser su límite $+\infty$?

A: Sí (no se da cuenta que la existencia de asíntota vertical está relacionada con límites puntuales infinitos).

I: Bien, entonces vamos a pintar esa situación (si comprende el concepto de límite puntual con valor infinito, el cual se ha trabajado gráficamente en clase, debería ser capaz de contestar correctamente).

A: (silencio. Tras varios minutos sigue sin escribir nada).

El problema de fondo es que el concepto de límite infinito no lo entiende y resulta esencial para responder correctamente a la tarea. Por el contrario, la cuestión del pre-test es mucho más sencilla, ya que un alumno puede resolverla bien, como es el caso, tomando de forma inconsciente un razonamiento erróneo, es decir, elegir una función continua no inyectiva y obligar a que un valor de y tenga varias pre imágenes –de hecho, todos los alumnos han utilizado modelos continuos-. En cierta manera ello supone asociar límite con imagen, que en el caso que nos ocupa no supone ningún problema, pero para en el caso de discontinuidades supone un conflicto cognitivo potencial.

## Diálogo 9

Dos alumnos del grupo experimental son entrevistados a la vez sobre la cuestión 10 del pos-test. Denotaremos por A1 al alumno y por A2 a la alumna. Curiosamente esta chica fue la única que respondió bien al apartado uno aunque en la exploración detectamos esquemas mentales inconsistentes y problemas de comprensión. Por el contrario, el otro estudiante, evidencia modelos intuitivos dinámicos y nociones de infinito potencial que le suponen un obstáculo insalvable.

A1: Lo primero que pensé es que al final de todas las iteraciones el área es cero (considera el límite como un proceso infinito terminado)… o aproximadamente cero pero sin llegar a cero (recula).

I: No llega a cero, porque si llegase a cero el conjunto desaparecería en un momento ¿no?

A1: Exactamente.

I: ¿Y este conjunto llega a desaparecer?

A1: No.

I: ¿Por qué?

A1: Porque en cada iteración va disminuyendo su área pero nunca llega a ser cero.

I: Entonces, el conjunto final ¿qué será? (debe ser algo con área tendiendo a cero). Es claro que su área tiende a cero, pero no es eso lo que te preguntan. Quiero saber el triángulo negro del principio, en qué se va a quedar.

A1: En un triángulo blanco.

I: Si fuese enteramente blanco eso es porque no hay nada negro…

A1: Claro, es como en el ejemplo de la pintura (recuerda el problema 1 de las actividades finales del manual) cada vez había más pintura azul, pero la blanca no había desaparecido, luego no era todo azul, sino que había un poquito de la otra (a ver si es capaz de trasladar el razonamiento).

I: Correcto, luego el conjunto final no puede ser un triángulo enteramente blanco porque de ser así, significaría que el negro se ha esfumado. Piensa que los triángulos cada vez son más pequeñitos, más pequeñitos… Cada vez hay más, pero también hay más blancos entre ellos…

A1: Sería como una línea, el contorno del triángulo…

I: Pero por dentro ¿también habrá cositas en negro no?

A1: Habrá puntitos negros (ahora ha dado con la clave) porque los triángulos son diminutos.

I: ¿Has dicho puntitos negros?

A1: Como triángulos pero no tienen forma de triángulo por lo juntos que están (el conflicto cognitivo que le produce la idea de infinito potencial no le deja visualizarlo geométricamente).

I: Y digo yo, ¿un triángulo deja de ser un triángulo por ser más grande o más pequeño?

A1: No, sigue siendo un triángulo.

I: Entonces, ¿en qué se queda el conjunto?

A1: Infinitos triángulos…

I: Es cierto que son infinitos triángulos, pero serán tan pequeños, tan pequeños, tan pequeños que puedan considerarse como ¿qué?...

A1: (silencio no es capaz de verlo).

I: Te doy una pista, si tú puedes disminuir tanto como quieras el tamaño de los triángulos negros, el conjunto tiene área cero en el infinito ¿cuál es el elemento más simple en cuánto a medida en el plano?

A1: una línea ¿no?

I: No. Hay algo más pequeño que una línea. ¿De qué está formada una recta?

A1: Un punto. ¡Claro! Lo que quedan son infinitos triángulos que parecen puntos (no parecen, sino que son puntos).

I: Ok. En el apartado del final (no ha contestado) ¿Qué pondrías?

A1: En todo momento lo supera. El conjunto final tiene como área el límite de cero… (No comprendo lo que quiere decir).

I: Querrás decir que el área del conjunto tiende a cero. ¿Llega a alcanzarlo?

A1: No, porque aunque los triángulos sean tan pequeños como puntos nunca llegan a desaparecer (tienen área por pequeña que sea).

I: ¿Cuál era el concepto de tendencia? (quiero ver si recuerda lo que se ha estudiado en clase)

A1: (silencio) se aproxima a cero en este caso.

I: ¿Se aproxima o tiende? ¿Recuerdas la diferencia?

A1: No, no sé.

I: ¿Tú te acuerdas de la diferencia entre límite, tender y aproximarse?

A2: No… (Ninguno de los dos parece recordar lo que se dio hace dos semanas).

I: Bueno, no pasa nada. Tú me has escrito que el conjunto final tras el procedimiento infinito… ¿sería?

A2: Un conjunto de puntos, tantos como iteraciones (eso es falso, hay más).

I: Mira el triángulo de la iteración 2. ¿Cuántos triángulos negros hay?

A2: Nueve.

I: Luego no hay tantos triángulos negros como iteraciones. ¿Cómo mejorarías tu respuesta?

A2: (silencio)

I: ¿Cuántos puntitos negros difuminados tendrá el conjunto final en el límite?

A2: Creo que infinitos… (duda).

I: ¿Por qué?

A2: Cada vez hemos añadido más triángulos blancos.

I: ¿Blancos o negros?

A2: Blancos, porque divide a los negros (se refiere a que se quita el del centro siempre).

I: Pasemos a la última pregunta, ¿puede ser que el área del conjunto en cualquier iteración supere a la del final?

A2: No, porque yo creo que en cada iteración vas dividiendo el área entonces es imposible (la respuesta es incorrecta, ya que se observa como la sucesión de áreas es mayor que cero siempre y tiende a 0).

I: Te planteo la siguiente cuestión ¿quién tiene más área, el triángulo de la primera iteración o el conjunto final?

A2: El final…

I: ¿El límite puede ser superado en general?

A2: (silencio) No sé a qué te refieres…

I: ¿Pueden existir funciones tales que el límite en un punto valga siete y tomen valores más grandes o se quedan siempre por debajo?

A2: No, no tiene por qué.

I: Entonces, que haya algún conjunto en alguna iteración cuya área sea superior a la del final ¿contradice la idea de límite?

A2: Sí, en este caso sí.

Queda comprobado que dicha alumna no comprende el problema ya que es muy evidente que las áreas cada vez son más pequeñas pero mayores que cero, que es la del conjunto límite. Hemos llegado a la conclusión de que la instrucción recibida en clase ha servido de muy poco, ya que no ha sido interiorizada por los alumnos, aunque estos también hayan mostrado mucho desinterés hacia la misma. Aun así, las ideas de infinito potencial y actual merecen un análisis aparte porque suponen un serio problema que obstaculiza la correcta comprensión de los conceptos.

# *Anexo VII Transcripciones del diario*

## Fragmento 1: Día 4/10/2017. Sesión 2

La transcripción de la intervención fue:

$$\lim_{x \to -1} f(x)$$

- Esto se lee como, límite cuando x tiende a -1 de f(x). Si quisierais calcular ese límite, ¿cómo lo haríais?
- Pues poniendo el -1 en la función y viendo cuánto vale (identifica límite con imagen lo cual es un grave error).
- Si estamos diciendo que x tiende a -1, ¿puede ser $x = -1$?
- No.
- Entonces no lo puedes poner. Primera idea que tenéis que desterraros, límite de una función en un punto no es lo mismo que imagen.

Se les pone un ejemplo sencillo de una función constante en todos los reales menos en un punto (los modelos discontinuos ayudan).

- Nosotros el año pasado lo hacíamos así. Sustituyendo.
- Claro, porque habría que preguntarse cuándo esa expresión ( $\lim_{x \to -1} f(x) \neq f(-1)$) se transforma en igualdad. Eso ocurre cuando la función es continua. Entonces límite coincide con imagen.

Para terminar, les propuse otro ejemplo gráfico de una función a trozos y se observan dificultades de otro tipo relacionadas con el concepto de dominio, recorrido, los procesos de límite implicados en ambos ejes y su relación.

## Fragmento 2: Día 10/10/2017. Sesión 4

Realizo una pregunta a un alumno:

- Si una función no está definida en un punto, ¿puede existir el límite de la función en ese punto?

Piensa unos segundos.

- No, porque entonces no se puede calcular.

Este alumno EVIDENCIA concepciones erróneas, ya que asocia límite de una función en un punto con la imagen por f en dicho punto -ya se han trabajado y puesto ejemplos en clase-. Esta concepción se resiste, y no sé si es porque su imagen conceptual es demasiado sólida -del tiempo que lleva asentada- y no he logrado romperla, o porque no estudian ni trabajan los conceptos.

## Fragmento 3: Día 16/10/2017. Sesión 6

Las últimas actividades versaban sobre tablas de valores. Durante el taller se han trabajado poco y aunque parecía que este registro les resultaba familiar -suele utilizarse mucho en el tema de funciones o incluso cuando empiezan a ver por primera vez los límites- me he encontrado con que había alumnos con dudas. Paso a enumerar los problemas detectados:

- No adivinan el valor al que tiende la x (puede ser porque aparecen números fraccionarios en vez de decimales).
- No saben leer la tabla apropiadamente, ya que no distinguen los dos procesos de límite implicados (uno en el eje x y otro en el eje y).
- Hay un problema derivado del excesivo uso de funciones monótonas en registro numérico, ya que los alumnos comentaban la imposibilidad de que la función tuviese límite en el punto debido a que los valores tabulados $f(x)$ no eran estrictamente crecientes o decrecientes. Este tipo de situaciones condicionan muy negativamente al alumno y los inducen a conflictos cognitivos ya que suelen asociar el valor de la función en el punto con el comportamiento en un entorno del mismo.
- Las cifras decimales y el orden posicional dificultan la interpretación del valor del límite. Los alumnos están acostumbrados a trabajar con números enteros y no son capaces de determinar límites que tengan varios dígitos en la parte decimal.

## Fragmento 4: Día 11/10/2017. Sesión 5

Tras detallarles el teorema de caracterización pasamos a comentar algunas consecuencias que se derivan de él y que los libros no suelen especificar (es importante que los alumnos desarrollen la competencia de Niss, *pensar matemáticamente*). Hemos podido contrastar como los alumnos comprenden perfectamente el enunciado del teorema, pero tienen dificultades a la hora de trabajar con el contrarrecíproco o recíproco. *Un error importante que suelen cometer es concluir que no existe límite cuando no pueden calcular alguno de los límites laterales (debido a que no existe dominio a un lado u otro del punto).* La función raíz cuadrada es un ejemplo sencillo de cómo existe límite en el punto x=0 pero no tiene sentido considerar el límite lateral izquierdo (por cuestiones topológicas).

## Fragmento 5: Día 11/10/2017. Sesión 5

Se recoge como tarea la actividad grupal de límites, la cual podía hacerse por parejas o grupos de 3. Algunos alumnos no entregan y la mayoría (después del puente del Pilar) ha estado estudiando para un examen de biología.

La tarea grupal para entregar ha sido una catástrofe en general (sólo un grupo ha aprobado) y evidencian varios problemas, los cuales paso a enumerar:

- Entender el límite como el resultado de un proceso infinito inacabado
- Errores conceptuales de tipo (límite con imagen)
- Problemas en el registro gráfico
- Concepciones erróneas en torno a la rebasabilidad-alcanzabilidad del límite
- Competencia matemática en modelización deficiente
- Cálculo y manipulación algebraica pobres
- Se pide una gráfica con 6 condiciones y pintan 6 gráficas (una para cada una) observando que hay alumnos que esbozan cosas que no son ni FUNCIÓN.

Decido corregir en el aula todos los problemas de dicha tarea salvo las indeterminaciones ya que ellos poseen las soluciones y quiero que lo intenten al menos. Hoy tienen (no todos), examen de biología y mientras hablo, algunos están ajenos a la clase. Un grupo no entiende lo que dice el enunciado, es decir, pintar una única gráfica con todas las condiciones ya que han dibujado una distinta para cada apartado. En segundo lugar, hay otros que no comprenden los conceptos involucrados porque confunden tendencia lateral con tender a más infinito, hecho que queda probado al plasmar la condición d) (conforme se aleja por la derecha del -2 la función vale -1) y no perciben la existencia de asíntotas verticales en las condiciones e) y f) (ver Ilustración 39 p.100).

## Fragmento 6: Día 16/10/2017. Sesión 6

Hay que comentar la falta de interés por parte de algunos alumnos (siempre los mismos) ya que mañana martes hay examen de química y se llevan la hora repasando e ignorando la materia. Ese mismo examen ha provocado que casi nadie traiga hechos los ejercicios lo cual es de suma importancia, ya que si no practican y estudian, es poco probable que respondan bien el cuestionario. Hechas estas apreciaciones, paso a comentar y reflexionar las actuaciones vividas:

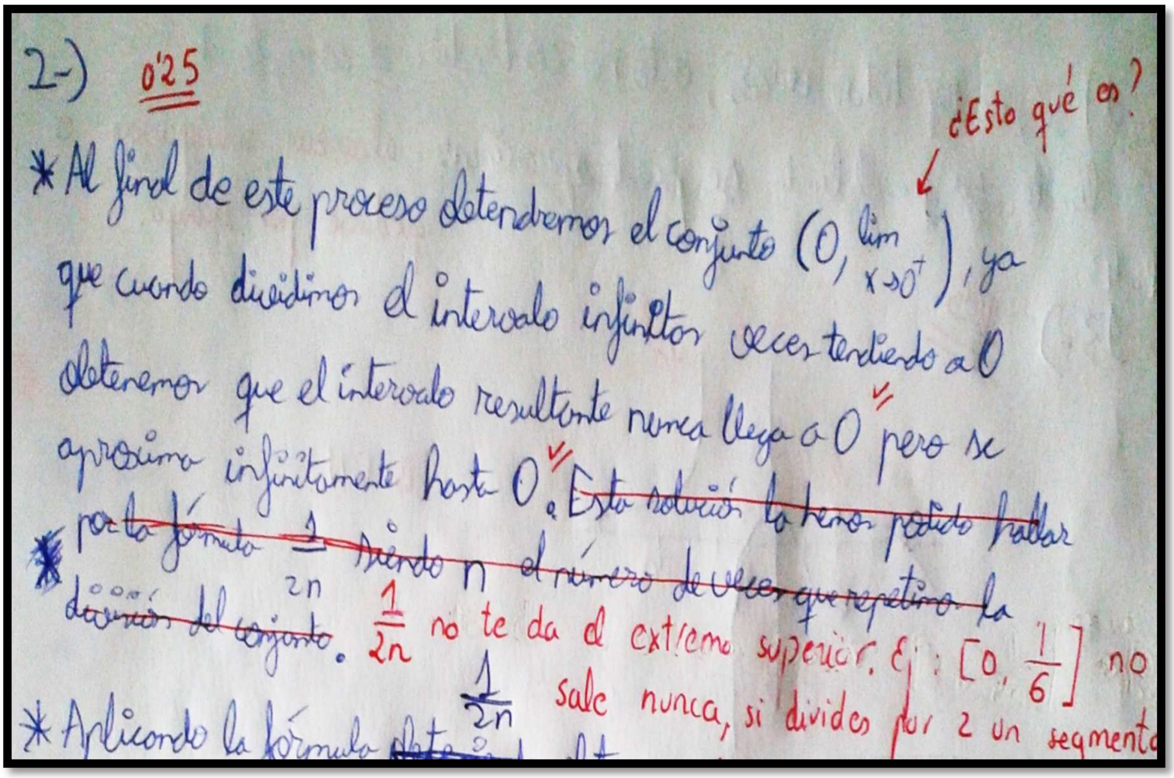
Los primeros ejercicios versaban sobre la unicidad del límite. Solicité la colaboración de un alumno. Se pedía una expresión algebraica pero me comentaba que no sabía darla (los alumnos tienen un bagaje pobre), aunque gráficamente sí. Dijo el seno (que es una función tal que posee el mismo límite en distintos puntos) aunque tuve que puntualizarle que a pesar de que había entendido el enunciado, dicho ejemplo no se correspondía con los requerimientos del problema (L=3). Es curioso ver como tenía la idea gráficamente pero no era capaz de dar una expresión algebraica (puede deberse a que no establecen conexiones entre los parámetros de las fórmulas y las gráficas), además del hecho de que recurre a una función continua.

En la siguiente actividad, a la pregunta de si dos funciones distintas podían tener diferente límite en el mismo punto, este discente argumentó que no y claramente su respuesta no era correcta. No utilizaba el teorema de unicidad para fundamentar su razonamiento (puede ser porque lo comprende bien y su obstáculo recaiga en otro aspecto). Propuse como ejemplo más simple el de 2 funciones constantes.

El problema 4 (cayó en el pre-test) tenía la dificultad añadida de que se daba una cuestión teórico práctica de mayor exigencia competencial. He tenido que hacerla yo en la pizarra. En este caso han surgido más dudas, puesto que se introducía el problema típico de asociar límite con imagen. Un discente no paraba de preguntarme por qué las funciones eran discontinuas y le dije que necesariamente tenían que serlo ya que si no, los límites coincidirían con las imágenes y el enunciado sería correcto. Noto mayor dificultad con este tipo de modelos que con los continuos.

## Fragmento 7: Respuestas Tarea Grupal

Adjuntamos las respuestas (Ilustración 36, Ilustración 37 e Ilustración 38) de la actividad 2 de la sección de problemas finales del manual del alumno (p. 42 del libro), la cual trata sobre el tópico 10, es decir, aplicar el concepto de límite a la resolución de problemas. En las respuestas leídas, podemos observar serias dificultades para entender el límite como el resultado de un proceso infinito acabado debido a que las concepciones de infinito potencial y actual no se han encapsulado y suponen un obstáculo. Además, los esquemas de límite como aproximaciones monótonas a un valor retroalimentan el error y generan un bucle del que es difícil hacerles salir.


2-) 0'25

¿Esto qué es?

* Al final de este proceso obtendremos el conjunto $(0, \lim_{x \to 0^+})$, ya que cuando dividimos el intervalo infinitas veces tendiendo a 0 obtenemos que el intervalo resultante nunca llega a 0 pero se aproxima infinitamente hasta 0. ~~Esta solución la hemos podido hallar~~ por ~~la fórmula $\frac{1}{2n}$ siendo n el número de veces que repetimos la división del conjunto~~.

$\frac{1}{2n}$ no te da el extremo superior. Ej: $[0, \frac{1}{6}]$ no sale nunca, si divides por 2 un segmento

* Aplicando la fórmula ~~dato~~ $\frac{1}{2n}$

Ilustración 36: Alumnos con esquemas dinámicos de límite

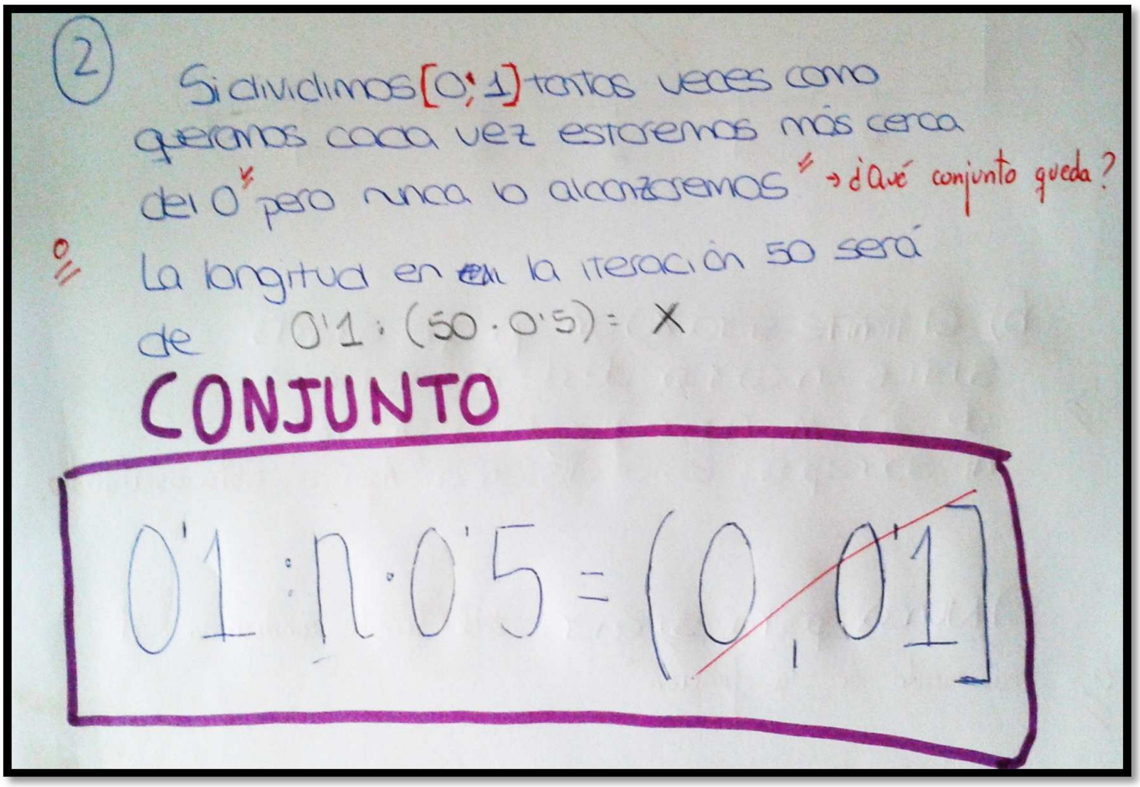



*Ilustración 37: Un grupo de alumno responde incorrectamente a la pregunta ya que no asocia el concepto de dividir infinitamente con un proceso terminado*

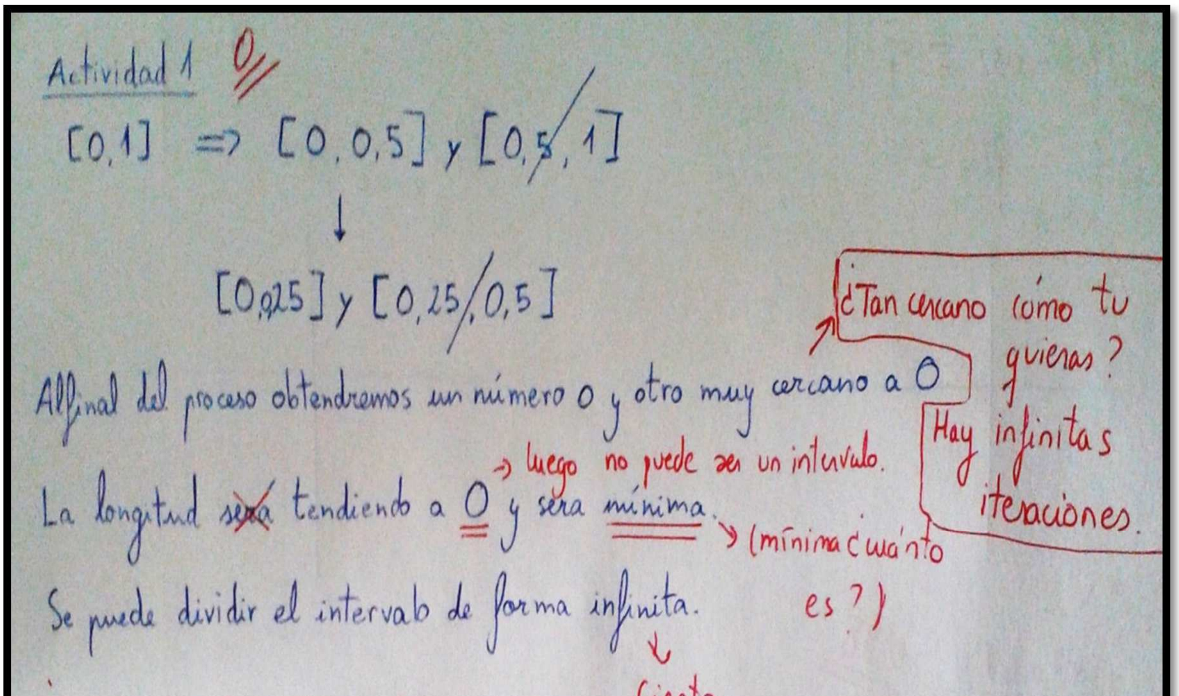



*Ilustración 38: Los alumnos evidencian problemas con el infinito actual*

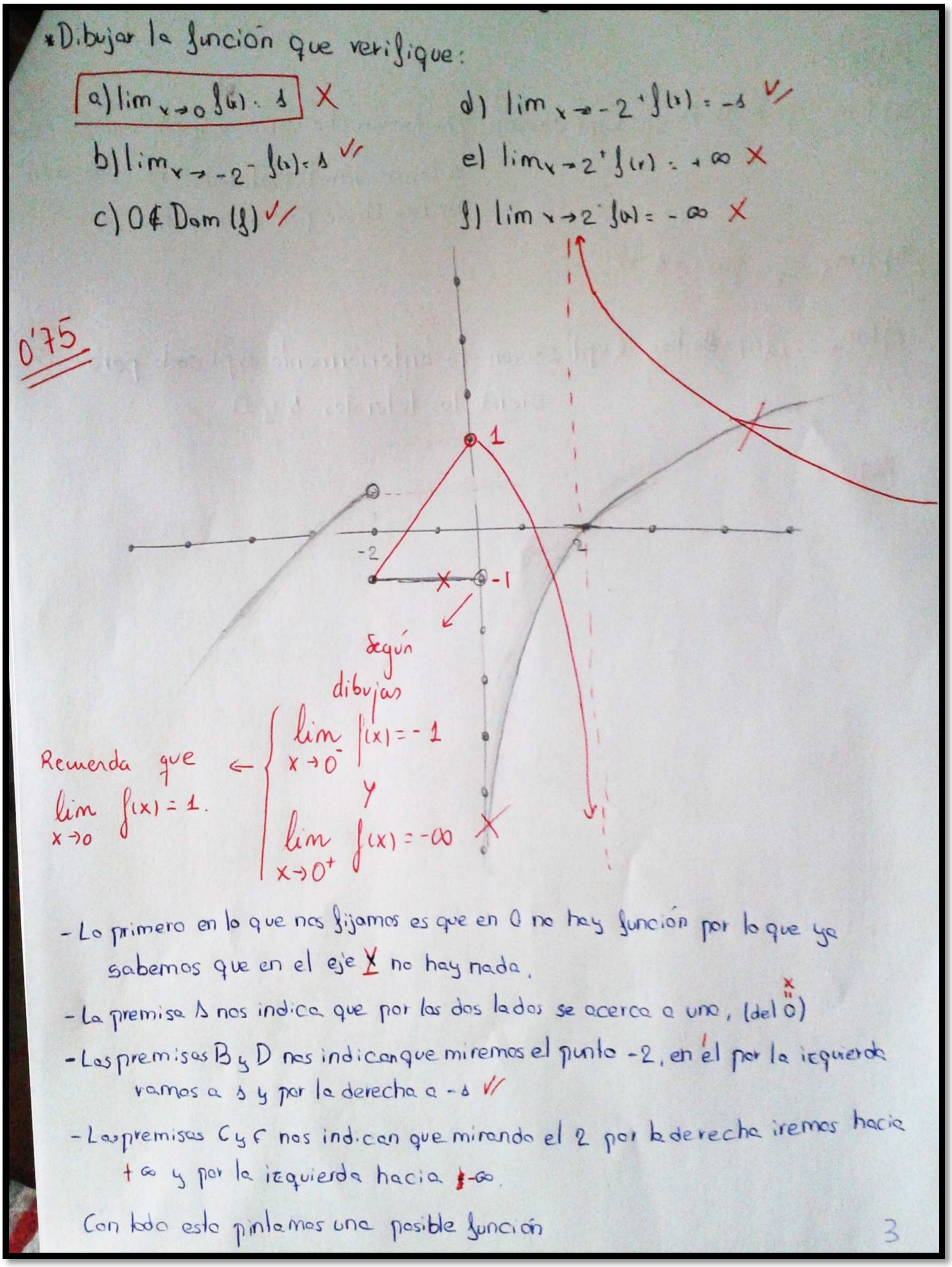



*Ilustración 39: Respuestas de un grupo de alumnos a la actividad 13 del manual, evidenciando que no comprenden los conceptos de lateralidad ni tendencia a infinito en un punto (Registro Gráfico)*

1

Andrés Pérez Montilla

Matemáticas II

# Introducción al estudio de los Límites de funciones

Versión Octubre 14, 2017

2º Bachillerato Ciencias y Tecnología

# Índice general

# 1 Introducción

El concepto de límite es la base y sustento de toda una rama de las matemáticas: el Cálculo. Tanto la noción de derivada como de integral, siendo probablemente la segunda de ellas más novedosa en este curso, descansan sobre dicho concepto, por lo que se hace necesario un estudio previo y exhaustivo del límite, ya que su comprensión resulta indispensable para entender términos como velocidad instantánea o suma infinita.

El presente documento, constituye un compendio de notas y apuntes que pretenden introducir al alumno en el estudio de los límites de funciones, tanto puntuales, y desde una perspectiva menos profunda en los límites cuando la variable independiente tiende a infinito, por ser este último término demasiado complejo para ser tratado con exhaustividad con alumnos preuniversitarios. El enfoque escogido pretende ahondar sobre todo, en la dimensión conceptual y no tanto en las rutinas de cálculo típicas de los manuales actuales, que priorizan las técnicas algebraicas necesarias para superar las pruebas de acceso a la universidad y desprecian la riqueza matemática de los límites funcionales. A pesar de ello, y con el objetivo de que pueda ser útil a un amplio abanico de modelos de enseñanza y profesores, se incluye un capítulo con todo lo necesario para alcanzar un dominio más que suficiente en el cálculo de límites básico-medio.

El resto de capítulos versan sobre la evolución y concepciones previas que han existido en matemáticas sobre los límites, hasta llegar a la definición formal, hoy en día utilizada por la comunidad matemática. Conocedor de la inmensa dificultad que entraña lograr que los alumnos logren comprender y asimilar la terminología, se adjuntan abundantes ejemplos e imágenes ilustrativas con el fin de aclarar ideas y facilitar la comprensión, aunque se recomienda muy encarecidamente utilizar este manual junto a algún programa de visualización gráfica (como geogebra) para acompañar las explicaciones. Estoy seguro de que será de gran ayuda.

Para finalizar, quisiera poner en valor la colección de ejercicios, problemas y cuestiones, los cuales han seguido un cuidadoso proceso de selección con el fin de ofrecer al estudiante la posibilidad de enfrentarse a sus miedos, ideas preconcebidas y poder así evolucionar. Por ello, querido profesor, dale la oportunidad de equivocarse, pensar, debatir con sus compañeros y preguntarse por qué, porque este libro no es más que un simple escenario con el que poder revolucionar el sofisticado status quo de la clase de matemáticas.

# 2 Evolución Histórica del Concepto de Límite

Antes de abordar el estudio del límite, es necesario conocer la evolución y desarrollo del concepto, ya que la mayoría de manuales de cálculo lo presentan de manera formal y rigurosa. Pero no es menos cierto, que hasta llegar a dicha formulación, los matemáticos de cada época han manejado concepciones diferentes y según las necesidades que fueron surgiendo en su trabajo, modificaron los significados previos. Presentar una definición terminada y pulida, sin antes estudiar los problemas asociados a ella, resulta totalmente antinatural, puesto que los mismos conflictos y obstáculos a los que ellos se enfrentaron pueden aparecer durante nuestro recorrido, y si somos conscientes de cómo se lograron superar, también nosotros podremos avanzar en su comprensión y formarnos una visión más rica y coherente de cualquier objeto de las matemáticas. El objetivo de este primer capítulo es indagar un poco en las concepciones acerca del límite que tienen tus compañeros y juntos, empezar a bosquejar un primer acercamiento al límite de una función. A continuación, se presentan las principales concepciones históricas del límite así como las dificultades que de ellas se derivan.

## 2.1 Cuestiones Previas

En el año 1609 el matemático y científico Johann Kepler publicó su obra *Astronomia Nova* en la que demostró dos famosas leyes astronómicas:

- Los planetas se mueven alrededor del sol siguiendo órbitas elípticas siendo uno de sus focos el Sol

- El radio vector del Sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

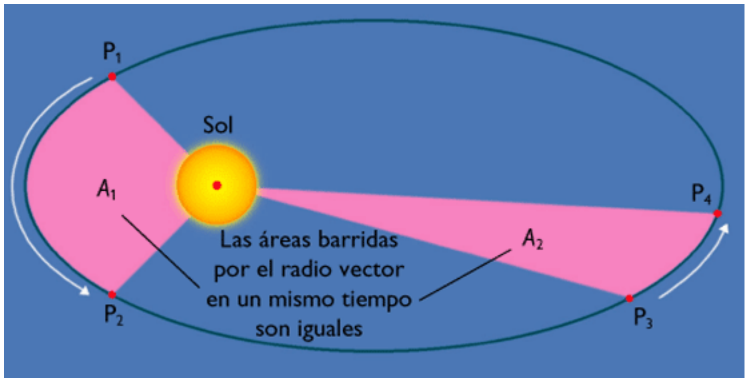



**Figura 2.1:** Los radio vectores se definen como el vector que une el centro del Sol con el centro del planeta

## Ejercicios

1. Deducir que el área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$. *Indicación: considera la circunferencia como la órbita de un planeta que gira alrededor del Sol y utiliza la segunda Ley de Kepler. ¿Observas alguna especie de "figura geométrica" cuya área si te sea conocida?*

2. Se considera la sucesión {0.9 , 0.99 , 0.999 , ... } Indicar cuál de las siguientes afirmaciones son correctas:

   - La sucesión tiende a 1
   - El límite de la sucesión es un número cercano al 1
   - El límite de la sucesión se aproxima a 1
   - El límite de la sucesión tiende a 1
   - El límite de la sucesión es 1
   - El límite de la sucesión es $0.\hat{9}$
   - $0.\hat{9}$ tiende a 1
   - $0.\hat{9}=1$

## 2.2 Distintas Concepciones Matemáticas acerca del Límite

En la sección anterior se han propuesto dos problemas históricos a los que durante siglos, muchos matemáticos se enfrentaron desde perspectivas muy diferentes. Aunque ya los griegos tenían una intuición de lo que es límite, dicho objeto matemático sólamente se empleaba para calcular áreas y volúmenes (véase el método de exhaución), y no fue hasta el siglo XVII con Newton y Leibniz, cuando el cálculo comenzó su andadura . A partir de entonces, una gran cantidad de insignes matemáticos como Cauchy, D´Alembert o Bolzano, se interesaron en estudiar realmente qué es lo que había detrás de todo. El resultado, la noción de límite.

### 2.2.1 Leibniz (1646-1716)

**Figura 2.2:** Gottfried Wilhelm Leibniz

Este matemático del siglo XVII fue junto a Newton (archiconocida fue su gran disputa por ver quién había sido el primero en inventar el cálculo) uno de los precursores de la noción de límite. Para Leibniz las cantidades infinitamente pequeñas (casi nulas) pero nunca iguales a 0, se conocían como **infinitesimales**. A su vez, la variación infinitesimal de una determinada variable x o y, la denotaba como dx y dy (respectivamente) y venía a significar como la distancia entre dos valores distintos muy próximos unos de otros, tales que se podía despreciar.
Basándose en la premisa de que cualquier variable contínua (por ejemplo el tiempo), puede variar tan poco, poquísimo, de modo que la distancia entre dichos valores será despreciable, concibió el límite de la siguiente forma:

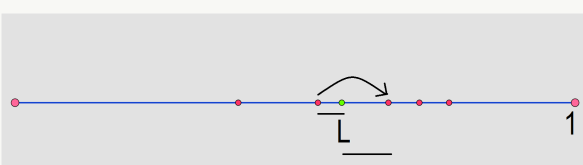
*El límite es un ente último tal que, existe una diferencia infinitesimal entre él y los valores que se le aproximan, tanto como se quiera.*

**Ejemplo 2.1**

Consideramos la sucesión {0.9, 0.99, 0.999,... }. Se pide hallar el límite según la definición de Leibniz.Para ello recurriremos a una tabla de valores.

| $n$ | $x_n$ | *Distancia* |
|---|---|---|
| 1 | $x_1 = 0.9$ | $1 - 0.9 = 0.1$ |
| 2 | $x_2 = 0.99$ | $1 - 0.99 = 0.01$ |
| 3 | $x_3 = 0.999$ | $1 - 0.999 = 0.001$ |

Tal y como se observa, el límite es claramente 1, porque la distancia entre los valores que se le aproximan es cada vez más pequeña (infinitesimal). Y además, puedo hacerla todo lo pequeña que yo quiera. Por ejemplo, si quiero encontrar una aproximación tal que $1 - x_i = 10^{-5}$ basta elegir $x_5 = 0.99999$.




Por otro lado podemos decir que 2 no es el límite de la sucesión ya que no podemos acercarnos a él con una distancia menor que 1, sea cual sea el término que empleemos. Tampoco podemos afirmar que el límite sea menor que 1, puesto que en algún momento, habrá un término de la sucesión que lo supere y a partir de ahí, todos los siguientes irán alejándose más, por lo que ya la diferencia no será infinitesimal.

### 2.2.2 D'Alembert (1717-1783)

D'Alembert fue un matemático francés famoso entre otras cosas por participar junto a Diderot en la redacción de la ilustre *L'Enciclopedie*, la primera enciclopedia o compendio del conocimiento científico y artístico del mundo. Hasta la fecha, tanto Newton como Leibniz habían estado trabajando en cocientes de cantidades infinitesimales (las derivadas) en los que la presencia del límite, se reducía a una perspectiva meramente instrumental involucrada en procesos de aproximación. D'Alembert fue el primero en crear la teoría de límites y en institucionalizarlo como objeto. Así, en la enciclopedia publicó la noción de límite de la siguiente forma:

**Figura 2.3:** Jean Le Rond D'Alembert

*Se dice que una cantidad es el límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada, tan pequeña como se pueda suponer, sin que la cantidad que se mueve pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se acerca (límite); de manera que la diferencia entre ésta y el límite, sea absolutamente inasignable. (D'Alembert, 1765 en Enciclopedie)*

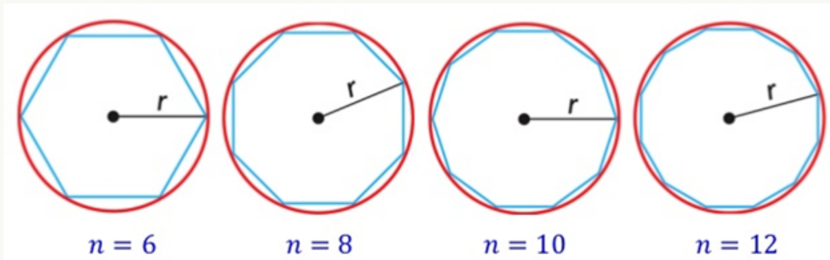
Algunas aclaraciones importantes sobre lo que se deduce de la definición son:

1. Para Leibniz el límite es un proceso dinámico (movimiento) de aproximación cuyo resultado es un *ente* (no olvidemos que el trabaja en problemas geométricos, donde buscaba hallar la pendiente de la recta tangente a una curva) mientras que D'Alembert coincide con él salvo en una pequeña matización:el límite es una cantidad o valor numérico (único además).
2. Las variables tienen que ser monótonas crecientes o constantes (toman el valor del límite).
3. El límite es una **cota superior** que no puede superarse ( Leibniz no hablaba nada de esto).
4. Y la más importante de todas, el límite es la **APROXIMACIÓN ÓPTIMA**, es decir, dada cualquier aproximación del valor del límite (por cercana que esté), siempre puedo encontrar otra que la mejore.

**Ejemplo 2.2**

Retomemos el problema del área del círculo. Los griegos empleaban un método conocido como exhaución en el que mediante aproximaciones por polígonos regulares (cuya área era suficientemente conocida) iban obteniendo aproximaciones cada vez mejores, sin saber siquiera que detrás de ello, estaba el concepto de límite.
En la imagen siguiente se observa cómo se llevó a cabo dicho método. Observe el lector detenidamente, que un polígono regular de n lados, puede descomponerse en n triángulos isósceles cuyos lados son el radio. Conforme aumenta el número de lados, aumentan los triángulos siendo sus

bases cada vez más pequeñas. Supongamos que queremos hallar el área de un círculo cuyo radio es 1 unidad.




Sabemos que $A = \pi u^2$. A continuación iremos realizando las diferentes aproximaciones del área a través de una tabla de valores:

| $i$ | Área polígono | Diferencia entre Límite y área aprox. |
|---|---|---|
| 3 | $\approx 1.3$ | $\pi - 1.3 \approx 1.84$ |
| 4 | 2 | $\pi - 2 \approx 1.14$ |
| 5 | $\approx 2.6$ | $\pi - 2.6 \approx 0.54$ |
| 8 | $\approx 2.83$ | $\pi - 2.83 = 0.31$ |
| 10 | $\approx 2.94$ | $\pi - 2.94 = 0.2$ |
| 20 | $\approx 3.09$ | $\pi - 3.09 = 0.05$ |

Como puede verse, las áreas de todos los polígonos siempre serán menores que la del círculo por encontrarse dicha sucesión inscrita en la circunferencia. Según D'Alembert el límite sería $\pi$ puesto que ningún elemento de la sucesión rebasará a esta cantidad, y los valores que se le aproximan tienen una distancia cada vez más pequeña conforme se aumenta el número de lados (será inasignable para n muy grande). Por supuesto que la mejor aproximación a un círculo mediante polígonos, es coger uno de infinitos lados, es más, si quiero mejorar un valor de partida, basta con ir aumentando el número de lados.
Por otro lado, cuando D'Alembert dice que el límite es una cantidad a la cual puede aproximarse uno con una distancia "tan pequeña como se pueda suponer", está diciendo que si estuviésemos interesados en conocer cuántos lados tengo que tomar para que el error sea por ejemplo inferior a 0.001 con tomar $n \geq 144$ de ahí en adelante todas las aproximaciones distan menos de 0.001 del valor del área. Por ejemplo para $n = 200$, el área es de $3.14108u^2$.

### 2.2.3 Cauchy (1789-1857)

**Figura 2.4:** Augustin Louis Cauchy

Augustin Louis Cauchy, fue un insigne matemático francés miembro de la Academia de Ciencias de Francia y profesor de la politécnica. Pionero en formalizar todos los conceptos del análisis, escribe su obra *Leçons sur le Calcul Différentiel (1826)* con el objetivo de que sus alumnos tuviesen un manual con el que poder estudiar todas las nociones relacionadas con el análisis. Gracias a Cauchy se precisan los conceptos de función, límite y continuidad en la forma actual (al menos en esencia), tomando la noción de límite como punto de partida del análisis y eliminando de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia (una dependencia entre variables. Es el conjunto de todos los valores de la variable dependiente). Es importante constatar, que en este período histórico aún no se tenía clara la noción de función, ni siquiera de número irracional y mucho menos se conocían todas las propiedades de la recta real. En otro libro denominado *Cours D'Analyse (1821)* ofrece su definición basándose en la de D'Alembert pero introduciendo por primera vez el concepto de variable:

> *Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás.*

Algunas consideraciones a tener en cuenta sobre la definición de Cauchy:

1. Se habla de una variable numérica dinámica (que se mueve), es decir, la definición sigue con el espíritu de una sucesión pero ha perdido ya ese matiz de aproximaciones dentro de un procedimiento instrumental. Ahora la variable puede tomar valores numéricos cualesquiera.

2. Algunos autores consideran que esta definición en realidad se refiere a límite de sucesiones, o en el caso de funciones a la variable dependiente (la y que es la que nos interesa).

3. El límite se ve como una aproximación tan concisa como se desee entre valores numéricos (aproximación infinita).

4. Expresiones como *"tanto como se desee"* empiezan a encapsular procesos infinitos implicados y de igual manera se salva de cuestiones relacionadas con la monotonía (deben diferir tan poco como queramos, sin importar si esa diferencia es por exceso o defecto).

## Ejercicios

1. Hallar y demostrar los siguientes límites razonando según las definiciones propuestas por Leibniz, D'Alembert y Cauchy. Adjunta un esquema gráfico a tu explicación o tablas de valores similares a las de los ejemplos 2.1 y 2.2.

   a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\ldots+\frac{9}{10^n}\right)$

   b) $\lim_{x\to 0} x^2$

   c) $\lim_{x\to -2} f(x) = \begin{cases} x+5 & si \quad x \leq -2 \\ -x+1 & si \quad x > -2 \end{cases}$

   d) $\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n & si \quad \text{n es par} \\ \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n} & si \quad \text{n impar} \end{cases}$

2. Demostrar razonando según Leibniz, D'Alembert y Cauchy que en los casos siguientes no existe límite. Ofrecer una justificación basada en las definiciones aportadas.

   a) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n$

   b) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

   c) $\lim_{n\to\infty} \cos(n)$

   d) $\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{2n} & si \quad \text{n es par} \\ \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} & si \quad \text{n impar} \end{cases}$

3. Hallar y justificar un método para hallar la recta tangente a una curva en un punto $(x_0, y_0)$ empleando un procedimiento geométrico y justificando a través de la noción de límite su validez. (*Indicación: utilizar la ecuación del punto pendiente* $y - y_0 = m(x - x_0)$.)

## 2.3 Obstáculos y dificultades históricas

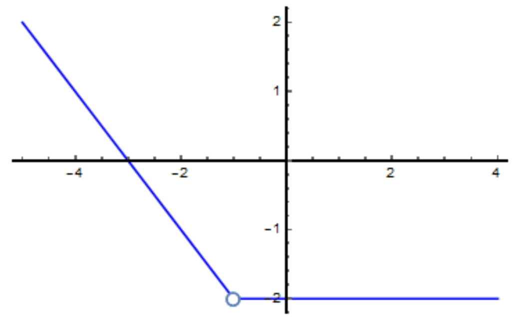
El hecho de que haya habido tantas definiciones de límite a lo largo de la historia es síntoma de que las matemáticas no son algo inmutable, sino que están en continua evolución y construcción. Lo que en una época parece correcto por el mero hecho de ser útil no implica que necesariamente dicha noción haya sido completamente encapsulada. Es más, todavía pudiese ocurrir (algo parecido ya sucedió a principios del siglo XX) que el conocimiento matemático actual entrase en crisis profunda ante un nuevo descubrimiento o problema que revelase incongruencias en el sistema axiomático que la sustenta.

Con el concepto de límite sucedió algo similar. Pero para ello, hemos de analizar algunas cuestiones y problemas asociados a las concepciones de límite.

### 2.3.1 Inconsistencias de la definición de Leibniz

Imagina que quisiéramos hallar:

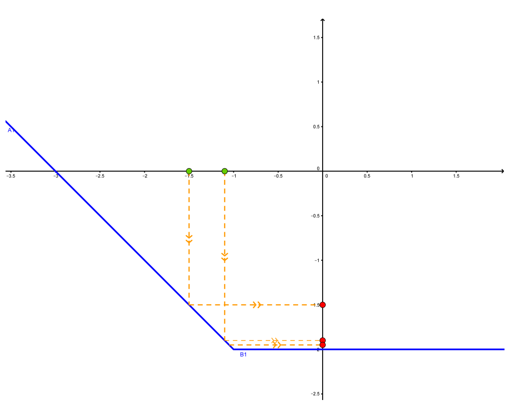
$$\lim_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} -x-3 & si \quad x < -1 \\ -2 & si \quad x > -1 \end{cases}$$




Si le preguntásemos a Leibniz cual es el valor del límite pedido, él sin dudarlo un segundo, diría que es $-2$. Para empezar no se asustaría (seguro que tu primer impulso ha sido averiguar cuánto vale $f(-1)$)por el hecho de que la función no esté definida en $x = -1$. No olvidemos que su teoría del límite se basa en el uso de aproximaciones (valores más lejanos o cercanos a $-1$ pero nunca iguales). Por consiguiente, para hallar el límite **no nos preocupa lo que pase en el punto $x = -1$.**
Su manera de proceder sería la siguiente, tendría como dos sucesiones diferentes, una en el eje x, $x_i$, cuyo límite sabe que es $-1$ y otra en el eje y, que coincide con los valores que va tomando la función para $x_i$, es decir, $f(x_i)$.

| $i$ | $x_i < -1$ | $f(x_i)$ | $f(x_i) - L$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $-1.5$ | $-1.5$ | 0.5 |
| 2 | $-1.1$ | $-1.9$ | 0.1 |
| 3 | $-1.09$ | $-1.91$ | 0.09 |
| 4 | $-1.05$ | $-1.95$ | 0.05 |
| 5 | $-1.001$ | $-1.999$ | 0.001 |
| 6 | $-1.0002$ | $-1.9998$ | 0.0002 |

La sucesión $f(x_i)$ dista infinitesimalmente del límite (en este caso -2), ya que puede hacerse tan pequeña como se quiera, conforme $x_i$ es más cercano a $x = -1$.



A priori todo parece indicar que la definición de límite dada por Leibniz, a pesar de ser muy vaga y poco concisa, intuitivamente va bien para las funciones. No obstante, nuestro querido matemático cuando pensó en el concepto de límite, se refería a una sucesión de aproximaciones monótona (aunque en la definición como tal no se diga explícitamente). Para las funciones no ocurre lo mismo, ya que en el ejemplo hemos tomado valores más pequeños que $-1$. Pero, ¿qué pasaría si realizásemos la misma tabla para números mayores que $-1$? Veámoslo:

| $i$ | $x_i > -1$ | $f(x_i)$ | $f(x_i) - L$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $-0.5$ | $-2$ | 0 |
| 2 | $-0.9$ | $-2$ | 0 |
| 3 | $-0.98$ | $-2$ | 0 |
| 4 | $-0.99$ | $-2$ | 0 |
| 5 | $-0.999$ | $-2$ | 0 |
| 6 | $-0.9999$ | $-2$ | 0 |

Como puede verse, la función para valores $x > -1$ es constante (siempre vale -2) luego **¡existe límite pero las cantidades que se le aproximan no difieren infinitesimalmente, sino que la distancia es cero!**. Luego tenemos un caso en el que la definición de límite dada por Leibniz es incongruente y hemos de desecharla.

### 2.3.2 Inconsistencias de la definición de D'Alembert

D'Alembert, a diferencia de Leibniz consideraba que el límite era una cantidad (un valor) tal que la distancia entre los valores que se le aproximan es tan pequeña como se pueda suponer (y eso incluye también que dicha distancia pueda ser 0). Así que la definición de D´Alembert salva el pequeño matiz de antes.

Si analizamos las tablas de antes, podemos observar que $f(x) = -2$ es la mejor aproximación que podríamos hacer de la función en el punto $x = -1$ ya que en un entorno de $x = -1$, los valores $f(x_i)$ se aproximan tanto como se quiera a dicho número.

| $i$ | $x_i < -1$ | $f(x_i)$ | $f(x_i) - L$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $-1.5$ | $-1.5$ | 0.5 |
| 2 | $-1.1$ | $-1.9$ | 0.1 |
| 3 | $-1.09$ | $-1.91$ | 0.09 |
| 4 | $-1.05$ | $-1.95$ | 0.05 |
| 5 | $-1.001$ | $-1.999$ | 0.001 |
| 6 | $-1.0002$ | $-1.9998$ | 0.0002 |

| $i$ | $x_i > -1$ | $f(x_i)$ | $f(x_i) - L$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $-0.5$ | $-2$ | 0 |
| 2 | $-0.9$ | $-2$ | 0 |
| 3 | $-0.98$ | $-2$ | 0 |
| 4 | $-0.99$ | $-2$ | 0 |
| 5 | $-0.999$ | $-2$ | 0 |
| 6 | $-0.9999$ | $-2$ | 0 |

Pero si nos atenemos a la última parte de la definición aportada en la página 5, se nos advierte de lo siguiente:

*sin que la cantidad que se mueve pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se acerca (límite)*

Es decir, el límite es visto como una **COTA SUPERIOR O VALOR QUE PUEDE ALCANZARSE PERO NO SOBREPASARSE** y esto en las funciones es algo que suele ocurrir con frecuencia. En el ejemplo de la sección anterior, la función supera el valor del límite, por ejemplo en $f(-4) = 1 > -2$. El $-4$ es una aproximación (bastante mala, sí) de $-1$ ya que podemos empezar a acercarnos hacia $-1$ por donde queramos (no hay limitaciones de cuánto de cerca, sino que a partir de ciertos valores próximos a $-1$ la distancia debe ser cada vez más pequeña).

A continuación se muestran casos de funciones con límite que no verifican que sean acotadas por dicho valor.

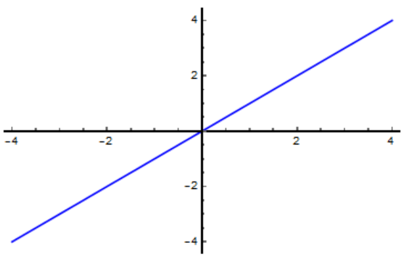


**Figura 2.5:** $\lim_{x \to -1} f(x) = -1$

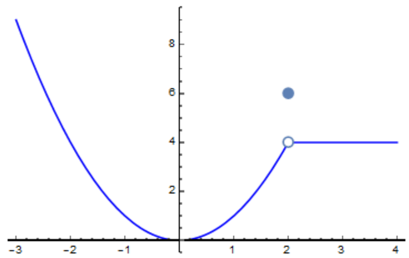


**Figura 2.6:** $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

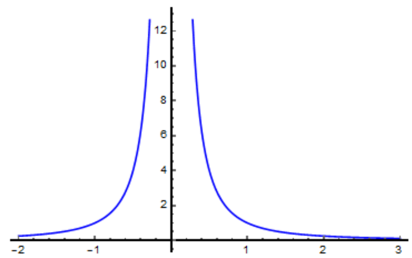


**Figura 2.7:** $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

Todas las funciones aportadas tienen límite y sin embargo, ello no implica que la función no pueda superar por encima o por debajo el valor del dicho límite. Por tanto la definición de D'Alembert es incoherente porque hay funciones con límite en un punto y no tienen por qué estar acotadas por dicho valor.

### 2.3.3 Inconsistencias de la definición de Cauchy

Dado que Cauchy se basó en la definición de D'Alembert para construir la suya propia, las inconsistencias son semejantes a las ya comentadas. Términos como *aproximarse indefinidamente* o *tan pequeño como queramos* son matemáticamente inaceptables por el hecho de que dejan al lector a libre interpretación hasta cuándo pueden diferir los valores.

Obsérvese el siguiente ejemplo para ver la inconsistencia de la definición de Cauchy:

**Ejemplo 2.3**

Consideramos en $\mathbb{Q}$ la sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Vamos a calcular $\lim_{n->\infty} a_n$ (en realidad sabemos que esa sucesión converge al número e). Realizamos una tabla de valores:

| $n$ | $a_n$ | $e - a_n$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 0.71828 |
| 2 | 2.25 | 0.46828 |
| 50 | 2.69158 | 0.02669 |
| 100 | 2.7048 | 0.01346 |
| 200 | 2.711517123 | $6.76 \cdot 10^{-3}$ |
| 5000 | 2.71801005 | $2.71 \cdot 10^{-4}$ |

Como puede verse podemos acercarnos tanto como queramos al número e a través de nuestra sucesión, sin embargo, y por chocante que pueda parecer **la sucesión $a_n$ no tiene límite** puesto que el número e es un número irracional, y nosotros estamos en $\mathbb{Q}$ que son los racionales. Si extendiésemos la sucesión al conjunto $\mathbb{R}$ entonces sí habría límite. Así que lo de acercarse indefinidamente puede llevarnos a error en algunos casos.

Como ya se sabe, una definición debe ser general y no depender del conjunto en el que se esté pensando o de ciertos casos con los que uno esté familiarizado. La grandeza de las matemáticas está en su carácter universal y por consiguiente, la definición aportada por Cauchy es inconsistente. Necesitamos un enunciado que abarque toda la casuística posible. Tendremos que esperar al siglo XIX para obtener una definición correcta de límite de una función en un punto.

## Ejercicios

1. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) Si una función f, verifica que $0 \leq f(x) \leq 2\ \forall x \geq 2$, además existe $\lim_{x\to 7} f(x)$ y es finito, entonces $\lim_{x\to 7} f(x) \leq 2$.

   b) La siguiente sucesión no tiene límite $a_n = (-1)^n$ según Leibniz.

   c) La definición de D'Alembert justifica que la siguiente sucesión $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ no tiene límite.

   d) Si una función f, no está definida en un punto $x = x_0$ entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = \nexists$.

   e) Para Cauchy una función estrictamente creciente siempre tiene límite en cualquier punto.

   f) Para D'Alembert una función estrictamente decreciente siempre tiene límite en cualquier punto.

   g) Para Cauchy, la siguiente sucesión tendría límite en $\{3, 3.14, 3.1415, 3.141592...\}$ y lo hace a $\pi$.

   h) Según D'Alembert la sucesión que cada vez va sumando 1 o $-1$ al término anterior, tendría límite $1-1+1-1+1-1+1...$

# 3 Límite de una Función en un Punto

Tras la lectura y reflexión del capítulo anterior, podrá preguntarse el lector si después de semejante controversia se ha llegado a una definición *impecable* de límite de una función en un punto. La respuesta es afirmativa, pero advertimos que ésta no es sencilla y mucho menos intuitiva, puesto que como se ha comprobado con los ejemplos aportados previamente, el concepto de límite en matemáticas es realmente complejo y poco o nada se asemeja al uso que le damos en la vida cotidiana. Las aportaciones de Cauchy, Leibniz o D'Alembert están recogidas en la misma, pero además, ésta no adolece de las inconsistencias previamente comentadas. Te invito, intrépido alumno de 2º de bachillerato, a que tomes asiento y veas con asombro, el cambio radical que van a experimentar tus concepciones.

## 3.1 Defininción $\varepsilon-\delta$ de Límite Finito de una Función en un Punto

El matemático alemán Karl Weierstrass fue el padre del rigor y del formalismo en el análisis. Gracias a él y a su definición de límite de una función en un punto, el cálculo por fin comenzó a entenderse como un todo bajo cuya raíz no hay otra cosa que el límite. Todas las propiedades y teoremas logran demostrarse gracias a su aportación, que apareció en un libro de su discípulo Heine, allá por el año 1872. Pero llegar a ella no resultó tarea fácil, ya que fueron necesarias nociones como "número real" y "conjunto infinito" las cuáles fueron abordadas por otros matemáticos como Cantor, Dedekind o Heine.

**Figura 3.1:** Karl Weierstrass (1815-1897)

Aunque la definición que se estudia actualmente tiene algunas leves modificaciones con respecto a la inicial, se enuncia de la siguiente forma:

*$L \in \mathbb{R}$ es el límite de una función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de $D$ si: para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.*

Como puede observarse, la nueva definición de límite supone un giro de 180º a las concepciones hasta ahora vistas. A continuación realizaremos algunas aclaraciones:

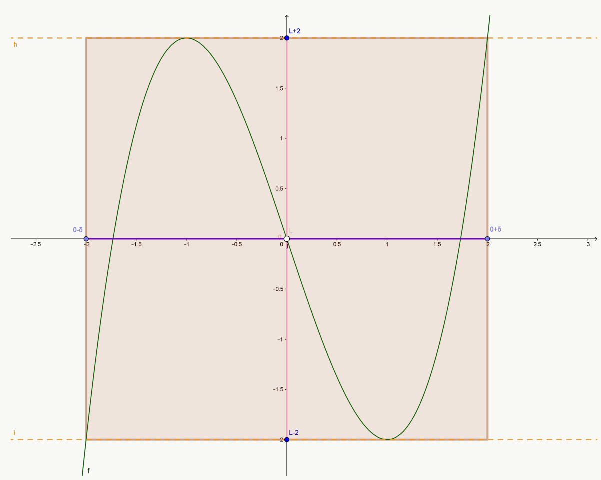
| | **Aclaraciones** |
|---|---|
| Concepción Estática | Evolución de la visión dinámica hacia una estática (sin aproximaciones) |
| Significado $\varepsilon$ y $\delta$ | $\varepsilon$ y $\delta$ son cotas de error o radios de entornos en el eje Y o X (respectivamente) |
| Significado $0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta$ | Entorno centrado en $x_0$ y radio $\delta$, es decir, $x \in (x_o - \delta, x_0 + \delta)$ y $x \neq x_0$ |
| Significado $\lvert f(x) - L\rvert < \varepsilon$ | Entorno centrado en $L$ y radio $\varepsilon$, es decir, $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ |
| Relación $\varepsilon - \delta$ | El valor de $\delta$ depende del $\varepsilon$ que hayamos escogido y no es único |
| Lectura Inversa | Se parte de un entorno centrado (llamado banda) en $L$ (eje vertical) y se busca otro, centrado en $x_0$ (abscisa) |
| Definición a priori | Para poder aplicar la definición debemos conocer a priori el valor del límite y en principio no tenemos ni idea de si dicha función tiene o no, límite en $x_0$ y mucho menos cuánto vale. |

**Cuadro 3.1:** Relaciones implicadas en la definición $\varepsilon - \delta$ de límite

Demostrar que un valor es el límite de una función en un punto, es algo complicado y que se escapa de los objetivos de este curso. A continuación se muestra un ejemplo de cómo puede utilizarse esta definición de forma intuitiva:

**Ejemplo 3.1**

Sabemos que $\lim_{x\to 0} x^3 - 3x = 0$. Luego, para cualquier $\varepsilon > 0$ y en especial $\varepsilon = 2$ existirá al menos (pueden haber muchos), un $\delta > 0$ que cumpla la definición. Se pide calcularlo e ilustrarlo gráficamente. Sea $\varepsilon = 2$, luego queremos hallar qué entorno del $x_0 = 0$ (sin incluirlo) verifica que las imágenes de dichos puntos pertenecen al intervalo $(0-2, 0+2)$. Con ayuda de la gráfica, hallamos $f^{-1}(-2)$ y $f^{-1}(2)$.



- Hallar $f^{-1}(-2)$ es equivalente a resolver la ecuación $x^3 - 3x = -2$ y tenemos dos soluciones $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$.
- Igualmente $f^{-1}(2)$, es equivalente a hallar $x^3 - 3x = 2$ y obtenemos $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$.

Tomando el intervalo más amplio (puede hacerse observando la gráfica), tenemos que si

Un punto de acumulación es un punto tal que cualquier entorno centrado en $x_0$ corta al dominio en al menos otro punto distinto de $x_0$.

$x \in (-2,2)$ entonces $f(x) \in (-2,2)$. Por definición de límite, dado que $0 < |x-0| < \delta$ hemos de eliminar el punto $x=0$.
Para hallar el delta, simplemente hemos de tomar $\delta = \min\{\text{distancia}(0,-2), \text{distancia}(0,2)\} = 2$, así que tomando, cualquier $0 < \delta \le 2$, podemos afirmar:

Para $\varepsilon = 2$, tomando $\delta = 1$ (¿por qué 1?), como $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, podemos afirmar que si $0 < |x| < 1$, entonces $|f(x)| < 2$.
Es más, sea cual sea el $\varepsilon > 0$ o cota de error de $L = 0$, podemos encontrar al menos un $\delta > 0$ tal que los valores $x \in D$, de modo que $0 < |x| < \delta$, sus imágenes $f(x) \in (f(x)-0, f(x)+0)$, lo cual viene a significar que estas aproximaciones poseen un error inferior a $\varepsilon$ del límite (importante resaltar que el intervalo $(-\varepsilon,\varepsilon)$ incluye el valor del límite $L=0$, otros superiores e inferiores, superando así la inconsistencia de D'Alembert).
*Interpretación:* $\lim_{x\to 0} x^3 - 3x = 0$, *si dada cualquier aproximación de* $L = 0$ *(o lo que es lo mismo, para una cota de error* $\varepsilon > 0$*), existe otra aproximación de* $x_0 = 0$, *(o una cota de error* $\delta > 0$*) de manera que existen valores que mejoran esta última aproximación (están más cercanos a* $x_0 = 0$*) siendo distintos de* $x_0 = 0$ *(es decir, valores comprendidos en* $0 < |x-0| < \delta$*), y resulta que mejoran cualquier aproximación de* $L = 0$ *(o lo que es lo mismo, están en* $|f(x)| < \varepsilon$*, para un* $\varepsilon$ *tan pequeño como se pueda suponer), siendo L la aproximación óptima.*

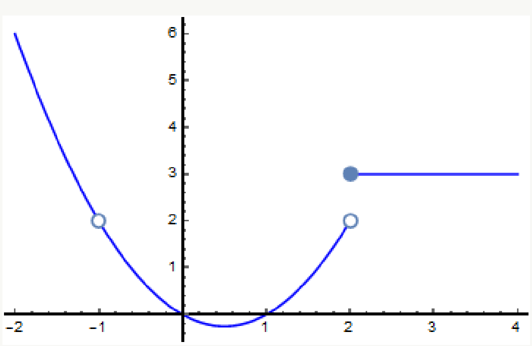
La nueva definición de límite es muy versátil y permite aplicarse a cualquier tipo de función, en especial, las definidas a trozos. Además, imaginemos que quisiéramos comprobar que un cierto valor L, no es el límite puntual. Tendríamos que darle la vuelta a la definición, puesto que ahora estamos intentando abordar el problema contrario, es decir, cuándo no se cumple la definición.

*$L \in \mathbb{R}$ NO es el límite de una función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un punto de acumulación $x_0 \in D$ si: existe un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$, los $x \in D$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ verifican que $|f(x) - L| \not< \varepsilon$.*

**Ejemplo 3.2**

Demostrar intuitivamente que $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$ y que $\lim_{x\to 2} f(x) \neq 3$. Donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) =$

$$\begin{cases} x^2 - x & si \quad x < -1 \\ x^2 - x & si \quad -1 < x < 2 \\ 3 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$$




Como no podemos ir probando todos los valores de $\varepsilon$ y tampoco tenemos conocimientos matemáticos para realizar una demostración de semejante envergadura tomaremos varios valores concretos, $\varepsilon = \{\frac{1}{10}, 3\}$ (como es para todo $\varepsilon$, qué más dará). Estos $\varepsilon$ pueden entenderse como cotas de error, o aproximaciones del valor del límite, ya que definen un entorno a su alrededor.

El caso es que tenemos que encontrar una cota de error para $x_0$ de tal manera que todos los valores incluidos en el entorno $(-1-\delta, -1+\delta)$ (salvo $x_0 = -1$, que está **SIEMPRE PROHIBIDO UTILIZARLO** ¿por qué?), sus imágenes queden dentro de la banda $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$.
La idea subyacente es que no importa qué tan pequeño o grande coja yo el $\varepsilon$, pues siempre se podrán encontrar valores tan lejanos o cercanos a $x_0$, (dependerá del tamaño del $\delta$) tal que sus imágenes $f(x)$, estén comprendidas dentro de dicho entorno $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Realizaremos las operaciones para el caso de $\varepsilon = 3$ y se deja para el lector el otro caso.

- Dado $\varepsilon = 3$, tenemos el entorno $(-1,5)$ Hallamos las preimágenes de ambos valores. El objetivo es calcular $f(x) = 5$. Como tenemos dos ramas, debemos hallar si existen soluciones en ambas (la segunda es obvia que no).Así que simplemente resolviendo $x^2 - x = 5$ extraemos dos soluciones $x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{3}$. En realidad sólo hay una, puesto que como $x < -2$ se rechaza la opción positiva. A continuación resolvemos la otra ecuación $x^2 - x = -1$ y vemos que no tiene solución real. ¿Qué hacemos en este caso?.
  Lo que ocurre es que la función está acotada inferiormente, y por tanto, a partir de cierto valor de y, ya no baja más. Esa circunstancia se da, en el vértice de la parábola, el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$.
  Así que tomando el intervalo $\left(\frac{1-\sqrt{21}}{3}, \frac{1}{2}\right) - \{-1\}$ hemos terminado. Pero yo no me complicaría tanto la vida, y tomaría el $(-1.5, 0.5) - \{-1\}$ (¿por qué éste y no $(-1.25, -0.75) - \{-1\}$?). Luego con $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ queda probada que para $\varepsilon = 3$ todas las imágenes del entorno $(-1.5, 0.5) - \{-1\}$ están contenidas en $(-1,5)$.

- Para demostrar que $\lim_{x\to 2} f(x) \neq 3$ hemos de encontrar un $\varepsilon$ (si encuentras más de uno estupendo) tal que sea cual sea el valor de $\delta$ haya imágenes de los puntos del entorno $0 < |x - x_0| < \delta$ que se salgan fuera de $|f(x) - L| < \varepsilon$.
  Si nos fijamos en $\varepsilon = \frac{1}{2}$ tenemos el entorno $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ y para cualquier $\delta > 0$, podemos afirmar que en la parte izquierda del entorno $(2-\delta, 2+\delta)$ hay puntos cuyas imágenes no están en $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ (por ejemplo $f(1) = 0$). Luego ya hemos probado que 3 no era el límite.

El ejemplo anterior era un caso claro de fácil aplicación de una noción (vista al revés claro). Es curioso como en matemáticas, las definiciones, teoremas o proposiciones sirven algunas veces, para lo contrario de lo que son creadas. En nuestro caso, la definición de límite es una herramienta más o menos fácil para ver que un cierto número NO es el límite puntual (en el ejemplo 3.2 era porque sus límites laterales eran diferentes ).
En realidad, necesitamos estrategias alternativas y más rápidas a la hora de saber si existe límite puntual y cuál es su valor. En el capítulo 5, aprenderemos diferentes herramientas de cálculo que simplifican notablemente los problemas y ejercicios, pero ninguna de ellas tendría fundamento ni certeza de no ser porque hay demostraciones que exponen su utilidad, y tengo que decirte, que todas ellas se basan en la definición de límite de Weierstrass.

## Ejercicios

1. Traduce razonadamente, ayudándote de la definición $\varepsilon-\delta$ y un ejemplo gráfico si quieres, las concepciones de límite de Leibniz, D'Alembert y Cauchy. ¿Cómo se han superado las inconsistencias?

2. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) Para que exista el límite en un punto, la función debe estar definida en dicho punto.

   b) Si para todos los $\varepsilon \in (0,10)$ existe un $\delta > 0$, tal que si $0 < |x-2| < \delta$, entonces, $|f(x)+\frac{1}{2}| < \varepsilon$, podemos afirmar que $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{-1}{2}$.

   c) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, los entornos (L-$\varepsilon$,L+$\varepsilon$) y $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ son simétricos.

   d Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x\in\mathbb{I} \\ x & si \quad x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ Como la distancia entre los sucesivos valores que se aproximan a 2, va disminuyendo tanto como se quiera, podemos afirmar que existe $\lim_{x\to 2} f(x)$.

   e) Si una función a trozos está definida en un punto $x_0$ entonces el límite en dicho punto es igual a $f(x_0)$.

   f) Si sabemos que una función tiene límite en un punto, entonces necesariamente, f, alcanza dicho valor.

   g) Decir que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ es equivalente a afirmar que $f$ toma el valor $L$ en algún punto del dominio, aunque no esté definida en $x_0$ específicamente.

   h) Decir que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \nexists$ es equivalente a que no existe $L\in\mathbb{R}$ que cumpla la siguiente condición:para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-x_0| < \delta$ entonces $|f(x)-L| < \varepsilon$

   i) Supongamos que una función f está definida en $x_0$. El significado de $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ es equivalente a decir que para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-x_0| < \delta$ entonces $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.

3. Para cada una de las siguientes funciones realiza lo siguiente: a) una tabla de valores y sugiere el valor del límite; b) La gráfica y di el valor del límite (puedes ayudarte de geogebra). c) Aplica la definición de límite para demostrar lo que has obtenido en los apartados anteriores.

   a) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} =$

   b) $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} =$

   c) $\lim_{x\to 0} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x=0 \\ 0 & si \quad x\neq 0\end{cases}$

   d) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x<\frac{1}{2} \\ -1 & si \quad x>\frac{1}{2}\end{cases}$

4. Para demostrar formalmente que $\lim_{x\to -1} x = -1$ seguimos el siguiente razonamiento:
   Sea $\varepsilon > 0$(el que yo quiera). Queremos demostrar que $|f(x)-(-1)| = |x+1| < \varepsilon$. Como debemos hallar un entorno de $x=-1$ tal que todas sus imágenes estén contenidas en el entorno inicial, tenemos que $0 < |x+1| < \delta$ luego si cojemos $\delta = \varepsilon$ tendremos asegurado que $|f(x)-(-1)| < \varepsilon$. Como ves $\delta$ depende del valor que tome $\varepsilon$.
   Demuestra que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

5. Probar que la función, $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ no tiene límite cuando $x\to 0$.

## 3.2 Definición de Límite Infinito de una función en un Punto

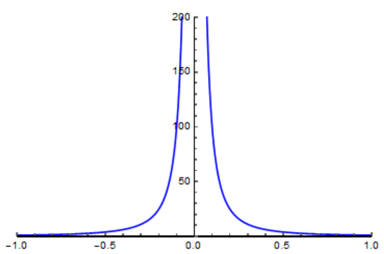



**Figura 3.2:** Función cuyo límite en $x = 0$ es $+\infty$

Cuando escribimos $\lim x \to x_0 f(x) = L$ estamos diciendo que el límite puntual toma un valor finito, es decir, un número real. Pero en algunas funciones, el comportamiento en el entorno del punto, es bien distinto. Observe el lector el ejemplo que se adjunta a la izquierda. En el punto $x = 0$ la función se sale del papel (sube y sigue subiendo eternamente), es decir, no toma ningún valor de y finito. En este caso diremos que el límite es $\infty$. Según el signo distinguimos entre $+\infty$ y $-\infty$. Es importante resaltar que $\infty$ **NO ES UN NÚMERO**, sino un concepto abstracto. Por consiguiente expresiones del tipo $x = \infty$, $\frac{3}{\infty}$ o $1^{\infty} = 1$ son matemáticamente incorrectas. No obstante podemos utilizarlas si sabemos interpretar su significado.

En matemáticas existen muchos tipos de infinitos: potencial, actual... Pero intuitivamente puede entenderse como una cantidad más grande que cualquier otra, y tal que si le quitamos otra cantidad infinita, sigue siendo igual de grande que al principio. Aunque en sí, el concepto puede parecer un poco complicado de estudiar, en nuestro caso, nos conformaremos con un acercamiento inicial y más bien gráfico-algebraico. La definición de límite, para el caso que nos ocupa, sigue el espíritu de la de Weierstrass (es que es tan buena, que sirve para casi todo) y en vez de $\varepsilon - \delta$ se conoce como $M - \delta$.

*Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y un $x_0 \in \mathbb{R}$ punto de acumulación de $D$.*

- Diremos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si: para todo $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > M$.
- Diremos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si: para todo $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) < -M$.

Intuitivamente lo que estamos diciendo es que, para cualquier valor de $M$ (cuyo valor absoluto sea tan grande como lleguemos a imaginar), ya sea positivo o negativo, siempre encontraremos un $\delta > 0$ tal que el entorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (quitando $x_0$) verifica que las imágenes, $f(x)$ de dichos puntos, son más grandes (diverge a $+\infty$) o más pequeñas (diverge a $-\infty$) que ese $M$. Dicho de otro modo, dada cualquier valor real $M > 0$ (respectivamente $-M < 0$) podemos encontrar una aproximación que mejore a cualquiera dada de $x_0$ de manera que la imagen por f, de dicha aproximación, supera (o es inferior) a $M$.

Realizar demostraciones con la definición de limite, incluso para el caso de infinito, es bastante complicado y se escapa de los objetivos del curso. No obstante vamos a realizar un ejemplo, donde ilustrar, intuitivamente el concepto:

**Ejemplo 3.3**

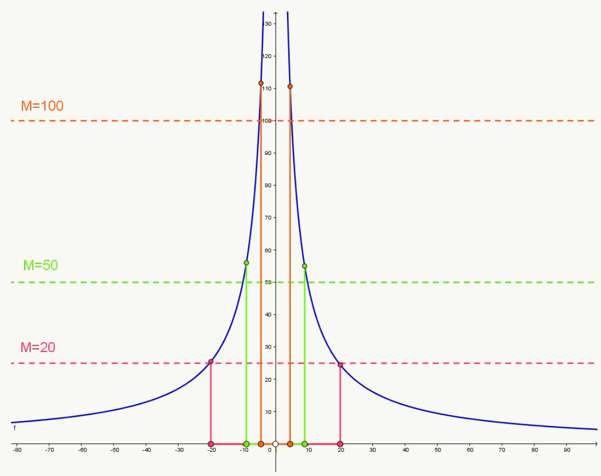
Tomemos la función $f(x) = \left|\frac{1}{e^{\frac{x}{500}} - 1}\right|$. Se nos pide demostrar que $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

- Si M=20, hemos de encontrar un $\delta > 0$ tal que el entorno $0 < |x| < \delta$ verifique que $f(x) > 20$. Tomando $\delta = 20$ o $\delta = 15$, se observa que el intervalo $(-20, 20)/\{0\}$ todas sus imágenes son mayores que 20. Por ejemplo $f(20) = 24.5033$ y $f(-20) = 25.5033$.

- Si M=50 observando la gráfica se observa que para $\delta = 9$ el entorno $0 < |x| < \delta$ verifica que $f(x) > 50$.
- Si M=100 observando la gráfica se observa que para $\delta = 4.5$ el entorno $0 < |x| < \delta$ verifica que $f(x) > 100$.

*Interpretación: para cada valor de $M > 0$ siempre encontramos una cota de error de $x = 0$ a la que llamamos $\delta$ tal que todos las aproximaciones contenidas en el entorno $0 < |x| < \delta$ verifican que sus imágenes son mayores que dicho $M > 0$. Como además, esto es posible para todo valor de $M > 0$ sin importar cuánto de grande sea su valor absoluto, podemos decir, que conforme x tiende a 0, las imágenes son mayores que cualquier valor $M$.*

Esta función no está definida en $x = 0$ ya que el denominador se anula, y aritméticamente no tienen sentidos cocientes de cantidades entre 0. Para nosotros, expresiones del tipo $\frac{1}{0}$ son consideradas como indeterminaciones, puesto que el límite puede hallarse fácilmente (estudiaremos técnicas en el capítulo 5) aunque el valor de la función NO EXISTA. Es importante a estas alturas, discernir la diferencia entre límite (lo que pasa en un entorno del punto, sin contar con el punto) y la imagen de dicho punto.




A su vez, puede verse como la función se va acercando cada vez más (sin llegar nunca a tocarla) a la recta $x = 0$, en este caso, dicha recta recibe el nombre de asíntota vertical.

Al igual que con el límite puntual, es interesante conocer, qué ocurre cuando $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq \infty$. Veamos como quedaría la condición:

*Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un punto de acumulación $x_0 \in \mathbb{R}$.*

- *Diremos que* $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq +\infty$ *si: existe un $M > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ el entorno $0 < |x - x_0| < \delta$ verifica que $f(x) \not> M$.*
- *Diremos que* $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq -\infty$ *si: existe un $M > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ el entorno $0 < |x - x_0| < \delta$ verifica que $f(x) \not< -M$.*

La definición anterior, sigue el mismo espíritu que la $\varepsilon - \delta$. Si quieres comprobar que el límite es $\infty$ tienes que ir tomando todos los $M > 0$ y encontrarle un $\delta > 0$ que satisfaga la condición, y obviamente, esto nos llevaría tiempo infinito por lo que no es muy operativo (para eso están las técnicas del capítulo 5). Sin

embargo, para ver que el límite no es $\infty$ nos basta con encontrar un $M > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ el entorno $0 < |x - x_0| < \delta$ no cumpla la condición de ser superior o inferior al $M$. Por lo que parece más útil utilizarla para demostrar que una función no tiende a infinito en un punto.
Vamos a ilustrar con un ejemplo, una situación en la que no se cumple la definición de límite puntual en menos infinito.

**Ejemplo 3.4**

Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-\pi} & si \quad x < \pi \\ \sqrt{x-\pi} - 2 & si \quad x \geq \pi \end{cases}$ Y comprobemos que efectivamente $\lim_{x\to\pi} f(x) \neq -\infty$.

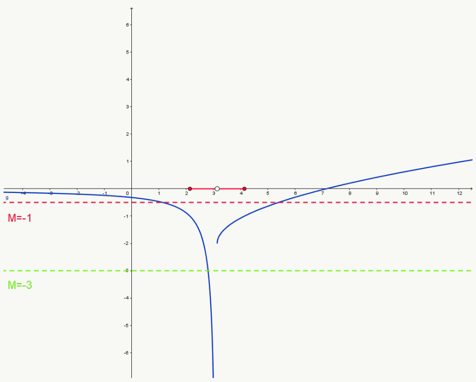



**Figura 3.3:** Caso de Imposibilidad de límite

- Si $M = 1$, tomando $\delta = 1$ se observa que en el entorno $(\pi - 1, \pi + 1) \diagup \{\pi\}$ todas sus imágenes cumplen $f(x) < -1$, es decir, la gráfica azul, queda por debajo de la línea discontinua roja. De aquí no podemos concluir nada, simplemente, que no hemos encontrado ese ansiado $M > 0$ que tumbaría la definición.
- Pero si tomamos $M = 3$ en cualquier punto del intervalo $(\pi, +\infty)$ la gráfica ya queda por encima de la línea verde, luego da igual que $\delta > 0$ tomes, que por la derecha, todos los $f(x) > -3$. Luego ahora SÍ hemos encontrado el $M > 0$ y podemos concluir que $\lim_{x\to\pi} f(x) \neq -\infty$.

Es más, como ya sabrás, dependiendo de la función, pueden existir muchos valores de $M$ que se carguen la definición. Si eres capaz de hallar 3 o 4, mejor para ti, es suficiente con hallar uno. Aquí, también valen todos los $M > 3$. Escogiendo cualquiera de ellos se tiene completada la demostración.

También hay que recordar que el procedimiento para ver que no se cumple la definición, es probar que para ese $M$ **TODOS** los $\delta > 0$ son no válidos. Luego si encuentras un $\delta > 0$ que no cumpla la condición, ello no quiere decir que hayas de cambiar de $M$, simplemente seguir probando con otros deltas (eso nos llevaría tiempo infinito). Este ejemplo era sencillo e intuitivo.

## Ejercicios

1. Para cada función se pide: a) Realizar una tabla de valores en un entorno del punto e intuir el valor del límite, b) Esbozar la gráfica de la función (puedes ayudarte del geogebra) y hallar el valor del límite y c) Ilustrar con la definición $M-\delta$ los resultados obtenidos:

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2-x-1}{x-1}$

   b) $\lim_{x\to -1} \frac{1}{x+1}$

   c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} tg(x)$

   d) $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} cos(x) & si \quad x \leq -2 \\ \left(\frac{3}{e^x-1}\right) & si \quad x > -2 \end{cases}$

2. Dibujar la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:

   *a)* f(0)=1, $\lim_{x\to 0} f(x) = -2$ y $\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$

   *b)* Dom= $\mathbb{R}$/-{1}, $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

   *c)* Dom= $(-2,1]\bigcup(2,4]$, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$ y $\lim_{x\to 3} f(x) = \nexists$

   *d)* $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = -\infty$ y $f(x) > 3, \forall x \in \mathbb{R} - /\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

3. Completar las siguientes tablas de valores e intuir el valor del límite:

   a) $\lim_{x\to 0} log(x)$

   | $x_i$ | $f(x_i)$ |
   |---|---|
   | 1 | 0 |
   | 0.5 | |
   | 0.2 | |
   | 0.1 | |
   | $3\cdot 10^{-6}$ | |
   | -0.05 | |

   b) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2x-1} & si \quad x < -1 \\ x^2+2 & si \quad x > -1 \end{cases}$

   | $x_i$ | $f(x_i)$ |
   |---|---|
   | -1.5 | 0 |
   | -1 | |
   | -0.75 | |
   | -0.68 | |
   | -0.501 | |
   | -0.3 | |
   | -0.487 | |
   | -0.495 | |

4. Indica si el siguiente razonamiento es verdadero o falso: si tenemos que todas las aproximaciones de un punto $x_0$ con error menor a un $0 < \delta < 1$ verifican que $f(x) > M$ sin importar el valor $M > 0$, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

5. ¿Es posible que una función acotada inferiormente pueda tener algún punto $x_0$ tal que $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$?

## 3.3 Límites Laterales de una Función en un Punto

En el siglo XVIII la Academia de Berlín, cuyo director era Lagrange, convocó un premio con el fin de crear una teoría clara y precisa de lo que era el infinito en matemáticas. Curiosamente, este evento está muy relacionado con la historia del límite ya que el galardonado fue un matemático suizo conocido como Simon-Antoine-Jean L'Huilier (1750-1840) gracias a su ensayo *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs* en el cual incluía una nueva definición de límite (¡OTRA MÁS!): *Sea una cantidad variable, siempre menor o siempre mayor que una propuesta cantidad constante (el valor del límite); pero de la cual puede diferir menos que cualquier propuesta cantidad menor que ella misma: esta cantidad constante se dice que es límite por exceso o por defecto de la cantidad variable.*
La novedad de L'Huilier radica en los conceptos de límite por exceso o por defecto. En realidad, al introducir esta distinción, se añadía una nueva observación hasta entonces no hecha por otros como D'Alembert: la aproximación al límite puede hacerse empleando una variable con valores crecientes o decrecientes. Nacieron así, lo que se conocen como **límites laterales.**

Por las características de la recta real (en matemáticas se conoce como la topología), dado un punto de acumulación, sabemos que cualquier entorno centrado en dicho punto, contiene infinitos puntos de la recta. A su vez, la recta real está ordenada, es decir, hay números mayores que otros o menores. Sin embargo, en el plano, tal orden no existe, por lo que hablar de límites laterales no tiene sentido, de modo que como puedes ver, la cuestión que estamos intentando abordar no es tan sencilla como simplemente hablar de *derecha e izquierda*.
Es importante destacar que los límites laterales tienen sentido cuando estamos hablando de acercarnos a un **UN PUNTO**, así que tenga el lector cuidado con otros conceptos tales como $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ que nada tienen que ver. Siguiendo la notación de Weirstrass quedan definidos de la siguiente manera:

1. Límites laterales de una función en un punto con valor FINITO:

   *Sea $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de $D$.*

   - *Diremos que* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ *si: para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in D$ *y* $0 < x - x_0 < \delta$ *entonces* $|f(x) - L| < \varepsilon$.
   - *Diremos que* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ *si: para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in D$ *y* $0 < x_0 - x < \delta$ *entonces* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

2. Límites laterales INFINITOS (positivo)de una función en un punto:

   *Sea $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de $D$.*

   - *Diremos que* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ *si: para todo* $M > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in D$ *y* $0 < x - x_0 < \delta$ *entonces* $f(x) > M$.
   - *Diremos que* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ *si: para todo* $M > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in D$ *y* $0 < x_0 - x < \delta$ *entonces* $f(x) > M$.

3. Límites laterales INFINITOS (negativo)de una función en un punto:

*Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de D.*

- *Diremos que* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ *si: para todo* $M > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in D$ *y* $0 < x - x_0 < \delta$ *entonces* $f(x) < -M$.
- *Diremos que* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ *si: para todo* $M > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in D$ *y* $0 < x_0 - x < \delta$ *entonces* $f(x) < -M$.

Nos preguntamos ahora que relación existe entre los límites laterales y el valor del límite. Para ello enunciamos un importante resultado que nos permitirá conocer dos cosas:

- Si existe o no el límite en un punto.
- Y en caso de existir, cuál es su valor (finito o infinito).

**Teorema 3.1**

**Teorema de Caracterización por Límites Laterales.** Sea una función $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, tales que existen los límites laterales $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ y resulta que coinciden ambos, entonces existe el límite de f en el punto $x_0$ y además $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

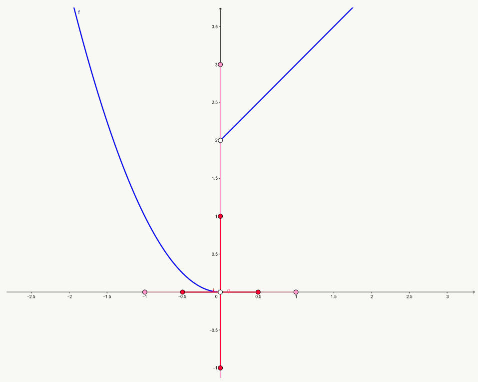
Del teorema anterior podemos extraer importantes conclusiones, que no aparecen explícitamente pero que pasamos a detallar:

- Si $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \nexists$ o $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \nexists$ entonces podemos afirmar que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \nexists$. Hay que diferenciar entre no existir y que no tenga sentido hallar el límite lateral. Por ejemplo, $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ pero $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x}$ no tiene sentido, ya que para valores negativos, la raíz cuadrada no está definida.
- Si la función está correctamente definida en un entorno del punto $x_0$ y $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)/\{x_0\} \bigcap D \neq \emptyset$ por ambos lados, entonces SÍ se tiene el recíproco, es decir, si existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.
- Si existen $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ pero son distintos, entonces concluimos que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ no existe.
- Cuidado con considerar $x_0^+$ y $x_0^-$ como números distintos. Tales expresiones **NO SON NÚMEROS**, sino una forma de decir que estamos tomando valores que tienden a $x_0$ mayores o menores que $x_0$ a la hora de calcular el límite.

**Ejemplo 3.5**

Hallar el $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad -3 \le x < 0 \\ x+2 & si \quad 0 < x \le 5 \end{cases}$

Para resolver este ejercicio utilizaremos tres registros diferentes: tablas de valores, la gráfica y álgebra.



- *Gráfica de la función:* a continuación se adjunta la gráfica de la función. Observamos que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ ya que si tomamos un entorno del $x = 0$ tales que $x < 0$ las imágenes f(x), de dichos puntos se acercan cada vez más al cero. Sin embargo, para un entorno donde $x > 0$, las imágenes se acercan al 2. Es importante señalar que $f(0) = \nexists$ y que los límites laterales están definidos perfectamente. Tenemos que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$. Luego concluimos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe debido a que los límites laterales no coinciden.

- *De manera algebraica-analítica:* podemos utilizar la definición $\varepsilon - \delta$. La ilustración es análoga a lo que estamos acostumbrados. Sea $\varepsilon > 0$, consideramos el entorno $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Y tal como se muestra en la imagen, por ejemplo, para $\varepsilon = 3$, tomando $\delta = 1$ se tiene que el subintervalo $(-1, 0)$, que es la parte izquierda del entorno $(-1, 1)$, verifica que todas sus imágenes están contenidas en $(0, 1) \subset (-3, 3)$. Como es posible encontrar el $\delta > 0$ para todo $\varepsilon$ que cumple la definición, tenemos que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Realizar una demostración similar para ver que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$.

- *Tablas de valores:* estudiaremos la tendencia lateral numéricamente tanto por la derecha como por la izquierda. Tomando valores en un entorno de $x = 0$ determinado por la cota de error $\delta = 1$. Los resultados obtenidos son:

| $i$ | $-1 < x < 0$ | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | $-1$ | 1 |
| 2 | $-0.5$ | 0.25 |
| 3 | $-0.25$ | 0.0625 |
| 4 | $-0.1$ | 0.01 |
| 5 | $-0.01$ | 0.0001 |
| 6 | $-0.001$ | 0.000001 |

| $i$ | $0 < x < 1$ | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 |
| 2 | 0.5 | 2.5 |
| 3 | 0.25 | 2.25 |
| 4 | 0.1 | 2.1 |
| 5 | 0.02 | 2.02 |
| 6 | 0.001 | 2.001 |

Hay que tener cuidado con la función ya que está definida a trozos, y debemos escoger la rama adecuada para cada intervalo de definición. Podemos intuir a raíz de los resultados obtenidos que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$ por lo que todo parece indicar que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

## Ejercicios

1. Para cada uno de los siguientes apartados se pide: a) analizar la tendencia lateral, intuir los límites laterales y con ello el límite, b) a partir de la gráfica obtener los límites laterales y el límite; c) ilustrar mediante la definición los resultados obtenidos.

   a) $\lim_{x\to 1} \sqrt{x-1}$

   b) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{2|x-2|}$

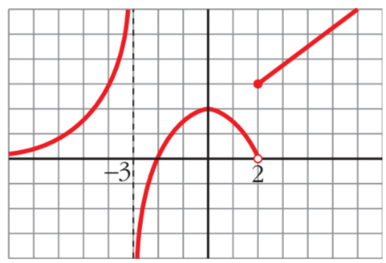
   c) $\lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+1)^2}$

   d) $\lim_{x\to 0} cos\left(\frac{1}{x}\right)$

   e) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-cos^2(x)}}$

   f) $\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad 0 \le x < 1 \\ 4 & si \quad x = 1 \\ 5-3x & si \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$

2. Observando la gráfica se pide calcular:




   a) $\lim_{x\to -3^-} f(x)$

   b) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$

   c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

   d) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

   e) $\lim_{x\to 3} f(x)$

   f) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

   g) $\lim_{x\to -2} f(x)$

   h) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$

   i) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$

3. A partir de la siguiente tabla de valores, se pide intuir los límites laterales y el límite:

| x | 0 | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{9}{10}$ | $-\frac{99}{100}$ | $-2$ | $-\frac{7}{4}$ | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{5}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2.5 | 3.02 | 2.5 | 2.7 | 2.701 | 2.70001 | -1 | 1 | -1 | 1 |

4. ¿Tiene Laura razón en su argumento? Justifica tu respuesta:
   Laura y Alejandro están en la plaza del Caballo un viernes por la tarde cuando Laura le comenta lo siguiente:

   *- En matemáticas, cuando estudio entre (2,3) horas el día antes, mi nota es un 3.25 y aunque no te lo creas, en los últimos exámenes me he estado poniendo unas (3,4) horas, y he sacado un 3.25 también. Si nos atenemos a lo aprendido en clase sobre límites, con 3 horas tengo asumido que nunca voy a aprobar matemáticas.*
   A lo que Alejandro le contesta: *- No te desanimes, piensa que a lo mejor con el nuevo profesor estudiando 3 horas, te cunde más de los que piensas y acabas aprobando.*

## 3.4 Unicidad del Límite

Una pregunta que se habrá hecho el lector (o no) es la posibilidad de que el valor del límite de una función en un punto pueda ser único. Por ejemplo, ¿dependiendo de la función puede darse el caso de que $\lim_{x\to x_0} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ a la vez? Hemos visto en la sección anterior que hay funciones que verifican cosas tales como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$.
En esta última sección intentaremos dar respuesta a dicha cuestión y además, nos plantearemos otros interrogantes que nos ayudarán a comprender aún más el hecho de que el límite puntual no puede tomar valores distintos. El siguiente teorema, considerado de gran importancia, nos permite afirmar sin ninguna duda que el límite de una función en un punto es único, y en caso contrario, simplemente no existe.

**Teorema 3.2**

**Teorema de Unicidad del Límite** Si una función $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene límite en un punto de acumulación $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces es único.

La demostración de este resultado, viene de aplicar las definiciones $\varepsilon - \delta$ o $M - \delta$ de límite. Realizaremos el caso de límite finito.

*Demostración.* Vamos a suponer que existen dos valores $L_1$ y $L_2$ para el límite, es decir, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_2$. Aplicando la definición de límite de Weierstrass se tiene que:

- Para todo $\varepsilon_1 > 0$ existe un $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_1$ entonces $|f(x) - L_1| < \varepsilon_1$
- Para todo $\varepsilon_2 > 0$ existe un $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_2$ entonces $|f(x) - L_2| < \varepsilon_2$

Como en realidad la definición debe cumplirse para todo $\varepsilon > 0$, vamos a suponer, sin pérdida de generalidad que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Con el delta, tomaremos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ para asegurarnos de que el entorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)/\{x_0\}$ funciona bien para el $\varepsilon$ escogido (piensa que cuanto más pequeñito sea mejor).

Simultáneamente tenemos que: para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $\begin{cases} |f(x) - L_1| < \varepsilon \\ |f(x) - L_2| < \varepsilon \end{cases}$ Sumando las dos últimas desigualdades tenemos que: para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < 2\varepsilon$
A continuación usaremos dos propiedades muy famosas del valor absoluto, una conocida como desigualdad triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$ y la otra $|x| = |-x|$. Así que, $|L_1 - L_2| = |-f(x) + L_1 + f(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < 2\varepsilon$. De toda esta cadena de desigualdades me quedo con el primer término y el último, es decir, $|L_1 - L_2| < 2\varepsilon$. Despejamos $\varepsilon$ y el resultado es $\varepsilon > \frac{1}{2}|L_1 - L_2|$ y como $\varepsilon > 0$ tenemos que resolver la ecuación $\frac{1}{2}|L_1 - L_2| = 0$ , que es equivalente a $|L_1 - L_2| = 0$. Y voilá, esto sólo puede ser verdad si $L_1 = L_2$.

Luego hemos llegado a la conclusión de que el $\lim_{x\to x_0} f(x)$ no puede tomar dos valores distintos. En consecuencia es único. □

## Ejercicios

1. Debate con tus compañeros la siguiente pregunta: ¿Sería posible encontrar dos funciones que tuviesen el mismo límite en el punto $x = \frac{3}{2}$? En caso afirmativo, da las expresiones algebraicas acompañadas de sus gráficas. Cálcula el valor del límite, y de los límites laterales. En caso negativo, justificad la respuesta.

2. Pensemos un problema parecido, ¿podría existir una función cuyo límite en dos puntos distintos $x_1$ y $x_2$ fuese $L = 3$? Dad la expresión algebraica, realizad una representación gráfica en caso afirmativo y si no, justificad la respuesta.

3. ¿Dos funciones distintas, $f_1$ y $f_2$ pueden tener distinto límite en el mismo punto? Igualmente argumentad su imposibilidad o aportad las expresiones algebraicas y las gráficas de dichas funciones.

4. Argumentad si el siguiente razonamiento es correcto y en caso de no serlo, proponed un contraejemplo gráfico donde se evidencia su falsedad:*Sabemos que dos funciones $f_1$ y $f_2$ tienen límite finito en $x_0$ y verifican que $f_1(x_0) = f_2(x_0)$. Entonces necesariamente* $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x)$.

5. Sabemos que dos funciones $f_1$ y $f_2$ poseen límites laterales en $x = 1$ y que $\lim_{x\to 1^-} f_1(x) = \lim_{x\to 1^+} f_2(x) = +\infty$. Además podemos afirmar que tienen límite en $x = 1$, ¿podrías deducir el valor de los límites laterales y del límite para $f_1$ y $f_2$? ¿Es posible que dos funciones tengan el mismo límite en el mismo punto o hay alguna incongruencia entre las suposiciones de partida y el teorema de unicidad?

# 4 Límites en el Infinito

Se ha estimado que la población de zorros en una finca se rige según la fórmula: $z(t) = 100\frac{6t^2+3}{2+t^2}$ donde z representa el número de zorros y t el tiempo transcurrido en meses. El veterinario de la finca observó que, en los primeros seis meses, la población ha aumentado. Su preocupación está en conocer lo que ocurrirá en el futuro, es decir, si es posible que la población alcance cotas tan grandes que los recursos naturales de la zona, se tornen insuficientes y ello ponga en riesgo la supervivencia de los animales.

El problema anterior nos requiere conocer cuál será el número de individuos de la población conforme avancen los años. Evidentemente, estamos ante un modelo, es decir, una estructura matemática que pretende explicar el comportamiento de un fenómeno natural. Pudiese ocurrir que un gran incendio, o una plaga mermase la cantidad de ejemplares hasta producirse la extinción, pero tales factores no son controlables fácilmente.

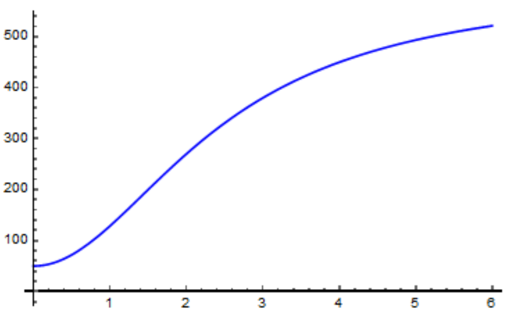
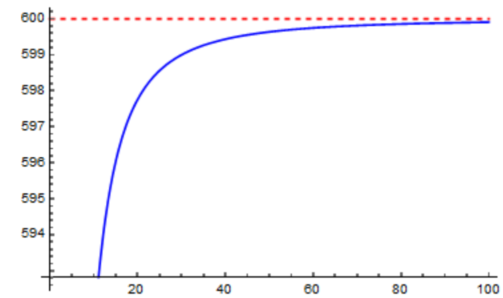
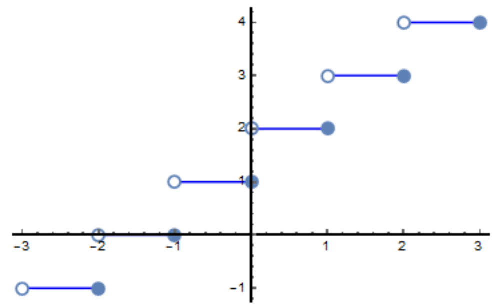
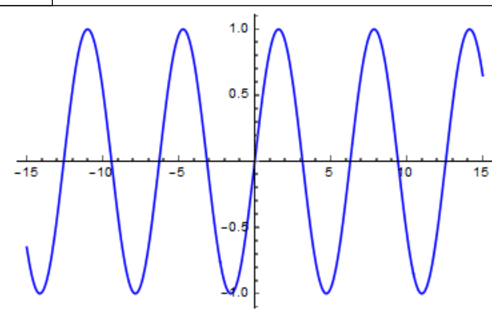


**Figura 4.1:** Gráfica de la función z

Si quisiéramos conocer el comportamiento de la función a los 6 meses, es decir, para t=6, podríamos calcular $f(6)$, que en este caso vale $z = 576.316$ lo que podríamos estimar en torno a 576 zorros. El tiempo, puede tomar valores $t > 0$ por lo que para resolver el problema, podríamos preguntarnos si es posible conocer hacia dónde tiende la función cuando $t \to +\infty$. Por consiguiente, queremos hallar el valor del $\lim_{t\to+\infty} 100\frac{6t^2+3}{2+t^2}$.

El estudio de los límites cuando la variable x tiende a $\pm\infty$ es similar a lo que hemos hecho previamente en este libro, aunque sólo daremos un acercamiento intuitivo, ya que el concepto de infinito en matemáticas no se ha ilustrado con claridad en ningún curso previo ni es objetivo de éste tampoco. Comentar, que también existe una definición en términos de $\varepsilon - M$ o $M' - M$ que obviaremos. El siguiente cuadro esquematiza distintas situaciones que pueden darse:

| | | |
|---|---|---|
| **Existe límite** | Finito |  |
| | Infinito |  |
| **No existe límite** |  | |

**Cuadro 4.1:** Distintas situaciones que pueden darse cuando $x \to \infty$

**Ejemplo 4.1**

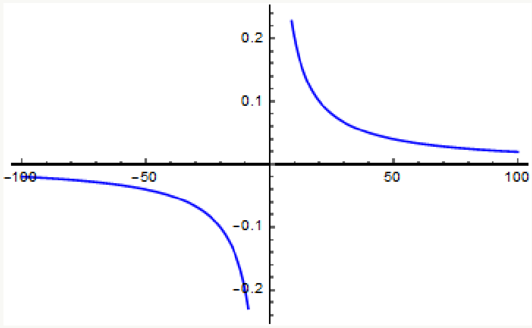
Hallar el $lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}$, $lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+1}{2x}$ (¡NO CONFUNDIR CON LÍMITES LATERALES!). Utilizaremos las tablas de valores y las represetanciones gráficas para poder intuir el posible valor del límite:

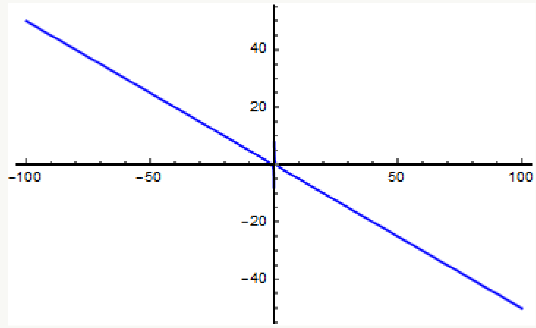
| $i$ | $x_i$ | $f(x)=\frac{2}{x}$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.2 | 1.667 |
| 2 | 30 | 0.067 |
| 3 | 97 | 0.021 |
| 4 | 200 | 0.01 |
| 5 | 1000 | 0.002 |
| 6 | 100000 | 0.00002 |

| $i$ | $x_i$ | $f(x)=\frac{-x^2+1}{2x}$ |
|---|---|---|
| 1 | $-1.2$ | 0.183 |
| 2 | $-20$ | 9.975 |
| 3 | $-97$ | 48.495 |
| 4 | $-200$ | 99.998 |
| 5 | $-1000$ | 499.999 |
| 6 | $-100000$ | 50000 |

A raíz de los resultados, podemos intuir que $lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}$ =0, $\text{lím}_{x\to-\infty}\frac{-x^2+1}{2x} = +\infty$.




- En la primera gráfica tenemos la función $\frac{2}{x}$ y cuando hacemos tender $x \to +\infty$ (es decir miramos la parte derecha del eje x) la función se va acercando a la recta $y = 0$ sin que llegue nunca a tocarla (¿demostración?). Esto no quiere decir que el valor del límite no pueda alcanzarse (¡cuidado con las ideas erróneas!) En este tipo de casos decimos que f tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ y por tanto $lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0$

- Para la de la derecha $f(x) = \frac{-x^2+1}{2x}$ si observamos la parte izquierda del eje x (puesto que ahora $x \to -\infty$) la función cada vez toma un valor mayor (positivo). Concluimos que $lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+1}{2x} = +\infty$.

## 4.1 Comparación de infinitos

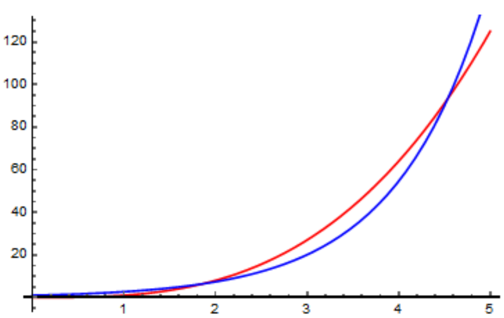



**Figura 4.2:** Gráfica de la función $e^x$ (azul) y $x^3$ (rojo)

En la gráfica de la izquierda se observan las gráficas de dos funciones que cumplen una característica particular: que ambas tienden a infinito (positivo) cuando x tiende a infinito (positivo). Visto desde una perspectiva muy curiosa, parece una carrera por ver quién llega antes a $+\infty$. En el tramo [0,2] gana $e^x$ (queda por encima de la otra), pero a partir del $x = 2$, se podría decir que $x^3$ le pega un vuelco a la carrera y se pone en cabeza hasta un x, entre 4 y 5 en el que vuelve a adelantarle el exponencial. A partir de ahí, la gráfica de la función azul se dispara mucho más rápido y la función cúbica poco puede hacer.

Ambas van a infinito, pero una lo hace más rápidamente que otra. Estas situaciones que también pueden darse al calcular límites $x \to -\infty$ se conocen como comparación de infinitos, no por el hecho de que un infinito sea más grande que otro (¿es eso posible?) sino porque se alcanzan antes (entiéndase el término). La rapidez en la convergencia es muy importante a la hora de analizar sobre todo, diferencias y cocientes de límites. Conocer cómo se comportan en términos de velocidad puede simplificarnos muchísimo los cálculos (como veremos en el capítulo 5).

*Supongamos que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ *y que* $\lim_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty$. *Decimos que el infinito de* $f(x)$ *es un infinito de orden superior al de* $g(x)$ *si:* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$. *O equivalentemente:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

*Si* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R}$ *entonces decimos que los infinitos de ambas funciones son asintóticamente equivalentes (van igual de rápidos.)*

**Ejemplo 4.2**

Probar que dadas dos potencias de x, la de mayor exponente tiene un infinito de orden superior, es decir, cuando $n > k$. Veámoslo con un ejemplo:

- $f(x) = x^3$, $n = 3$
- $g(x) = x$, $k = 1$

Tenemos que, $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ y que $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$. Hallaremos $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Concluimos que el infinito de la función $f(x)$ es superior al de $g(x)$.

En general, para poder ver qué infinito es de orden superior debemos recurrir al cálculo del límite del cociente, y éste nos dará la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ que es una expresión estudiada en el siguiente capítulo. No obstante, ofrecemos a modo orientativo algunos ejemplos de funciones elementales ordenadas de menor a mayor orden de infinito.

$$log(x) < x^n < e^x$$

El siguiente resultado nos ayudará a calcular límites en el infinito sin tener que preocuparnos de si es $+\infty$ o $-\infty$:

*Se tiene la siguiente equivalencia:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

**Ejemplo 4.3**

Calcular $\lim_{x\to-\infty} e^x$ y $\lim_{x\to-\infty} e^{x^2}$. Aplicaremos la equivalencia de límites en el infinito:

- $\lim_{x\to-\infty} e^x$ siendo $f(x) = e^x$ luego $f(-x) = e^{-x}$. Así pues $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} e^{x^2}$ ahora $f(x) = e^{x^2}$ y $f(-x) = e^{(-x)^2}$ (cuidado con los paréntesis y las potencias que soléis equivocaros). Por lo tanto, $\lim_{x\to-\infty} e^{x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{x^2} = +\infty$.

## Ejercicios

1. Mediante una tabla de valores, y la gráfica de la función (puedes usar geogebra) hallar los siguientes límites:

   *a*) $\lim_{x\to+\infty} \frac{cos(3x)}{x} =$

   *b*) $\lim_{x\to-\infty} \frac{|x-1|}{x} =$

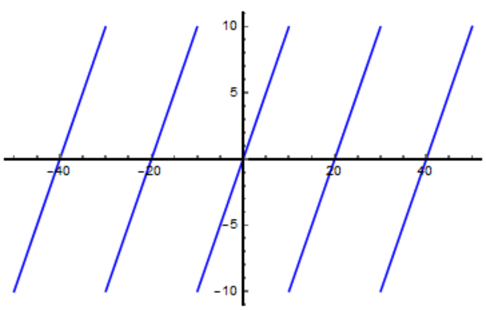
   *c*) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} =$

   *d*) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} cos(x) & si \quad x<0 \\ ln[x+1] & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

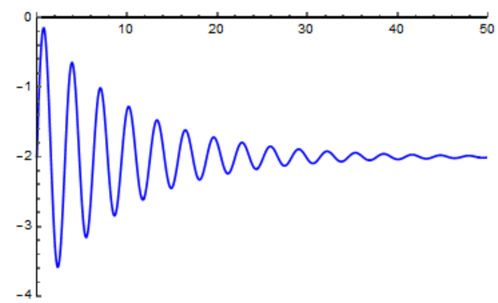
   ¿Se alcanza el valor del límite en algún momento? ¿Puede la función superar el valor del límite?

2. A través de las siguientes gráficas determina cuando vale $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (según el caso):

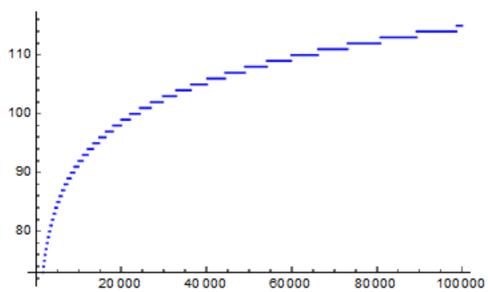
a)



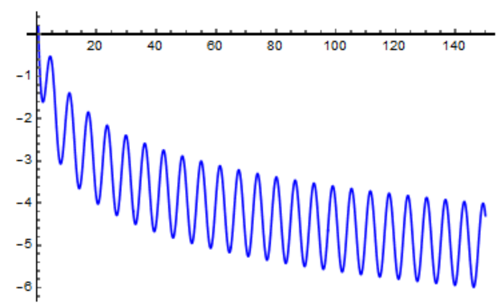

c)




b)




d)




3. ¿Dos funciones $f_1$ y $f_2$ distintas pueden tener el mismo límite cuando $x \to +\infty$? Razonar por qué no es posible o dar las expresiones algebraicas de dos funciones distintas que sí cumplan la condición.

4. ¿Una función puede tener el mismo límite cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$? Razonar por qué no es posible o dar una ilustración gráfica donde sí ocurra.

5. Sabemos que $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2}{x^2+1} = 1$. ¿Alcanza la función el valor del límite? A raíz de los resultados obtenidos, ¿contradice esto la idea de límite en el infinto?

# 5 Álgebra y Cálculo de límites

En los capítulos anteriores hemos tratado y formalizado el concepto de límite de una función en un punto y en el infinito. En todas las definiciones aportadas, imperaba una concepción a priori, es decir, para poder empezar a establecer razonamientos y manejar los épsilons y deltas, necesitábamos conocer un posible candidato a límite (finito o infinito). En general, esta manera de proceder es poco operativa, aunque sea necesario abordarla mínimamente para llegar a entender algo, de lo contrario nos convertiríamos en meras calculadoras u ordenadores. Este capítulo, de carácter práctico, nos permitirá adquirir una serie de técnicas algebraicas y de cálculo con las que poder hallar límites de funciones.

## 5.1 Operaciones elementales con límites

***Nota importante:*** *tal y como hemos comentado en las secciones anteriores, sabemos que en general,* $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ *por lo que no podemos emplear la sustitución directa para poder calcular el valor del límite. Hacerlo sin más, es un GRAVE ERROR, puesto que supone identificar límite con imagen (y ya hemos visto muchos ejemplos donde ambas cosas son diferentes). No obstante, cuando la función es continua en el punto* $x_0 \in Dom(f)$*, entonces estaremos en condiciones de asegurar que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$*. De aquí en adelante, consideraremos que las funciones elementales: polinomios, logaritmos, exponenciales, racionales, irracionales, trigonométricas, operaciones elementales con ellas, y composiciones, son continuas en su dominio.*

**Teorema 5.1**

**Álgebra de límites** Supongamos que f y g son dos funciones de variable real las cuales tienen límite en $x_0 \in \mathbb{R}$ (el resultado es igual si $x \to \pm\infty$) entonces las siguientes funciones tienen límite y además:

- $\lim_{x\to x_0}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim_{x\to x_0}(f \cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$
- Si $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ entonces $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

El teorema anterior es muy útil y rápido para calcular gran cantidad de límites de funciones, pero parte de una asunción inicial muy importante: que las dos funciones tengan límite. El recíproco no es cierto,

es decir, si existe $\lim_{x\to x_0}(f \cdot g)(x)$ (por poner un ejemplo, puede ser perfectamente extensible a otras operaciones) no necesariamente han de existir por separado $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)$.
El siguiente ejemplo ilustra la aplicabilidad del teorema:

**Ejemplo 5.1**

Calcular:

1. $\lim_{x\to 0} e^{-x} + 2 - x$. Dividimos la expresión en dos funciones distintas $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = 2 - x$. Observamos la gráfica de la función $f(x) = e^{-x}$. g es continua en $x = 0$ por ser una recta o polinomio de grado 1. f es composición de funciones continuas (el exponencial) y el polinomio $-x$. Podemos decir que ambas tienen límite en $x = 0$ y por el resultado anterior, el límite de la suma existe. Para calcularlo aplicamos sustitución directa: $\lim_{x\to 0} e^{-x} + 2 - x = \lim_{x\to 0} e^{-x} + \lim_{x\to 0} 2 - x = 1 + 2 - 0 = 3$

2. $\lim_{x\to 0} x sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ y sin embargo ya sabemos que $\lim_{x\to x_0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe aunque el producto sí. Esto no contradice el teorema del álgebra de límites.

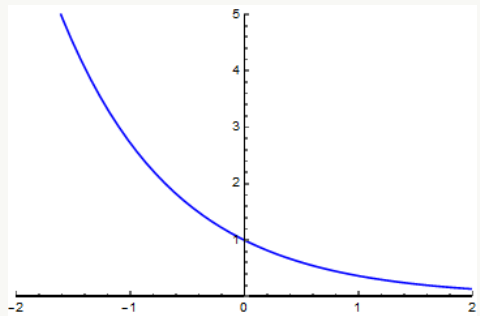



**Figura 5.1:** Gráfica de la función $e^{-x}$

## 5.2 Indeterminaciones

Algunas funciones, como ya sabemos de sobra, pueden no estar definidas en el punto $x_0$ donde se quiere calcular el límite, pero ello **no implica que no exista el límite**. La sustitución directa puede resultar engañosa, ya que muchas veces nos ofrece expresiones que carecen de RIGOR matemático. Lo mismo ocurre cuando $x \to \infty$ que lo consideramos como un número al que podemos elevar al cubo, sumarle otro... **y no lo es.** Se conocen como indeterminaciones a determinadas expresiones que surgen al intentar resolver un límite por sustitución directa y resultan incongruentes o no inmediatas de deducir. Pero, en realidad esto no quiere decir que dicho límite no se pueda calcular o que sea indeterminado, simplemente que necesitamos recurrir a técnicas más inteligentes que hallar $f(x_0)$. En esta parte se presentan algunas, no todas, de las indeterminaciones más usuales y algunas estrategias para afrontarlas. Cabe recalcar, que como ocurre muchas veces en matemáticas, nada es INFALIBLE ni sirve para todo, por lo que en muchos casos, tendremos que pensar por nosotros mismos procedimientos alternativos.

### 5.2.1 Indeterminación $\frac{0}{0}$

Para resolver este tipo de indeterminaciones podemos utilizar algunas estrategias basadas en técnicas algebraicas.

a) Si tenemos un cociente de polinomios:

   - Factorizar el numerador y el denominador usando Ruffini o hallando las raíces.

- Sacar factor común.
- Identidades notables

b) Si aparecen raíces: multiplicar arriba y abajo por el conjugado (en el caso de raíces cuadradas o de índice par).

Veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 5.2**

Hallar el valor de $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$. Si sustituimos $x=2$ en la expresión tenemos que el denominador se anula, y por tanto no existe $f(2)$. Pero ello no nos impide calcular el valor del límite.
Es más, también se anula el numerador. Factoricemos $\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$. Observamos que el numerador es una identidad notable, $x^2-4x+4=(x-2)^2$. El denominador se factoriza hallando las raíces del polinomio.
$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x-3)}$. Cuando $x\neq 2$ tenemos que $f(x)=\frac{(x-2)}{(x-3)}$ y como estamos hallando el límite cuando $x\to 2$ por definición de límite, estamos considerando valores de x, en un entorno del $x=2$ pero nunca iguales al valor del punto, por lo que la expresión de $f(x)$ tras la factorización nos dará el valor del límite. Así que, por sustitución directa: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-3)}=\frac{0}{-1}=0$.

**Ejemplo 5.3**

Hallar el valor de $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$. Por sustitución directa, tenemos una expresión absurda en el sentido matemático, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}$.
Multiplicamos por el conjugado: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$.
Si $x\neq 1$ entonces $\frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=(x+1)(\sqrt{x}+1)$ y $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)(\sqrt{x}+1)=4$

**Ejemplo 5.4**

Hallar $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$. Si sustituimos directamente vemos que la función no está definida en $x=0$ por lo que no es contínua en $x=0$ ya que ni siquiera $x=0\in$ Dom(f). Además $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=\frac{0}{0}$. No obstante el límite puede hallarse, y como ya hemos observado a través de su gráfica, $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$ pero ninguna de las técnicas que se presentan en este libro te servirán para resolver ciertos límites.
No desesperes querido lector, pues hay muchísimas herramientas en el universo matemático, siendo una de ellas de gran utilidad y conocida como la regla de L'Hopital, la cual estudiarás este curso y conectará dos maravillosos mundos, el de las derivadas y los límites.

### 5.2.2 Indeterminación $\frac{k}{0}$

Estos límites se resuelven calculando los límites laterales y aplicando el teorema de caracterización. Pueden suceder dos cosas: que exista y sea infinito, o que no exista el límite.

**Ejemplo 5.5**

Lo intentaremos por sustitución directa (aunque ya sabemos de antemano que no va a funcionar). $\lim_{x\to 2} \frac{2x+3}{x^2-4} = \frac{7}{0}$. Tenemos una expresión indeterminada.

Procedemos a resolverla mediante los límites laterales: $\lim_{x\to 2} \frac{2x+3}{x^2-4} = \begin{cases} \lim_{\to 2^-} \frac{2x+3}{x^2-4} = \frac{7}{0^-} = -\infty \\ \lim_{\to 2^+} \frac{2x+3}{x^2-4} = \frac{7}{0^+} = +\infty \end{cases}$

Para hallar los límites laterales debemos fijarnos en el significado y no tanto en expresiones del tipo $\frac{7}{0^-}$ (por ejemplo). En este caso, tenemos que la función se anula en $x = 2$ luego no podemos hallar el límite por sustitución directa. Pero, como para hallar el límite no nos hace falta que la función esté definida en dicho punto, sino en un entorno del $0 < |x-2| < \delta$ aplicando la regla del cociente del cálculo de límites, se deduce que el numerador tiende a 7 cuando $x \to 2$ (es continua en $x = 2$ y se puede calcular mediante sustitución) y el denominador dependerá de si estamos en $(2-\delta, 2)$ (izquierda) o $(2, 2+\delta)$ (derecha). Del denominador, sabemos a ciencia cierta que tenderá a cero, pero nos interesa conocer el signo del mismo. Por lo que el segundo paso es determinar el **SIGNO DEL DENOMINADOR**.

- Si $x \in (2-\delta, 2)$, estamos calculando $\lim_{x\to 2^-} x^2-4 = \lim_{x\to 2^-}(x+2)(x-2)$ el cual sabemos que tiende a 0, pero si observamos con detenimiento la expresión, veremos que al ser $x+2 > 0$ para todo $x < 2$ (pero próximos al 2) y $x-2 < 0$ para todo $x < 2$ e igualmente próximos a 2, la diferencia $x^2-4$ es negativa por la regla de los signos. Luego el resultado será un infinito de signo negativo (aplicando la regla de los signos con el numerador y el denominador).

- Si $x \in (2, 2+\delta)$, estamos en la situación $\lim_{\to 2^+} x^2-4 = \lim_{x\to 2^+}(x+2)(x-2)$ y la diferencia tenderá a cero, pero en este caso, $x+2 > 0$ para todo $x > 2$ (cercano al 2) y $x-2 > 0$ para todo $x > 2$ (próximo al 2), por lo que la diferencia $x^2-4 > 0$. Luego el resultado será un infinito de signo positivo si nos acercamos por la derecha (aplicando la regla de los signos con el numerador y el denominador).

Empleando el teorema de caracterización del límite a través de los límites laterales, podemos concluir que el límite no existe, ya que los límites laterales existen pero no coinciden.

### 5.2.3 Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Para resolver esta indeterminación tenemos a nuestra disposición diversas técnicas:

a) Si tenemos un cociente de polinomios $\frac{p(x)}{q(x)}$ escogemos el monomio de mayor grado del numerador y luego el del denominador, para luego sacar factor común dichos monomios arriba y abajo respectivamente. Resolvemos el límite.

El siguiente criterio es equivalente a realizar la operación anterior: $\begin{cases} \frac{\text{signo(a)}}{\text{signo(b)}}\infty & si \quad \text{grado(p(x))} > \text{grado(q(x))} \\ 0 & si \quad \text{grado(p(x))} < \text{grado(q(x))} \\ \frac{a}{b} & si \quad \text{grado(p(x))} = \text{grado(q(x))} \end{cases}$

Donde a y b son los coeficientes principales del numerador y del denominador.

b) En otros casos podemos utilizar la comparación de infinitos combinados con técnicas algebraicas como producto de conjugados, factor común, factorización...

**Ejemplo 5.6**

Calcular $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3+3}{3x^2+2}$. En primer lugar aplicamos la sustitución directa (en realidad esto no tiene sentido ya que el infinito no es un número y no se puede multiplicar, sumar, elevar a potencias...). $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3+3}{3x^2+2}=\frac{\infty}{\infty}$. Utilizamos la equivalencia de la página 31.
$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3+3}{3x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-(-x)^3+3}{3(-x)^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{+x^3+3}{3x^2+2}$. Ahora tomamos el monomio de mayor grado de $p(x)$ que sería $x^3$ y en el denominador $q(x)$ corresponde a $3x^2$. Procedemos a operar algebraicamente sacando factor común:

$$\frac{+x^3+3}{3x^2+2}=\frac{x^3\left(1+\frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}=x\frac{\left(1+\frac{3}{x^3}\right)}{\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}$$

Podemos simplificar puesto que cuando $x\to+\infty$ se cumple que $x\neq 0$ (siempre hay que ser cuidadoso al tachar). Luego nuestro límite inicial queda reducido a: $\lim_{x\to+\infty}x\frac{\left(1+\frac{3}{x^3}\right)}{\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}$ que procederemos a resolver ingeniosamente.

$$\lim_{x\to+\infty}x\frac{\left(1+\frac{3}{x^3}\right)}{\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x^3}\right)}{\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}x\frac{1}{3}=+\infty.$$

Si observamos detenidamente el último paso de la argumentación tenemos que el límite es un producto muy particular: algo que tiende a $+\infty$ por el cociente de los coeficientes principales de cada polinomio.
Aunque el procedimiento de cálculo pueda resultar un tanto tedioso, es importante conocerlo y utilizarlo con soltura, por lo que te aconsejo realizar suficientes ejercicios al principio hasta tenerlo completamente dominado, y luego pasar a utilizar el criterio que es mucho más rápido, pero que se deduce del algoritmo aquí detallado (recuerda: en matemáticas hay que aprender a pensar, no memorizar sin más.) Si hubiésemos aplicado el criterio directamente, diríamos que como $\text{grad}(p(x))=3>\text{grad}(q(x))=2$ por comparación de infinitos, el polinomio de arriba, llegará antes a alcanzar el infinito que el del denominador. Ahora bien, para determinar si dicho infinito es positivo o negativo, miramos el cociente de los coeficientes principales que es en este caso $\frac{1}{3}$, el cual tiene signo positivo, por consiguiente el $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3+3}{3x^2+2}=+\infty$.

**Ejemplo 5.7**

Calcular $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+\sqrt{x^4-5}}$. Utilizaremos la sustitución directa simplemente como indicador de qué indeterminación tenemos, pero hemos de resaltar que el infinito no es un número. El resultado inicial es $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+\sqrt{x^4-5}}=\frac{\infty}{\infty}$.
El caso de las raíces es un tanto más complicado puesto que ya no tenemos polinomios usuales (con potencias naturales) sino que son fraccionarias. El criterio en este caso es adaptable, pero creo que es más sano realizar las operaciones de factorización reseñadas al principio de la sección.

- En el numerador tenemos la expresión $\sqrt{4x^2+5x}=(4x^2+5x)^{\frac{1}{2}}$ y tomando el coeficiente principal de $4x^2+5x$ que es $4x^2$, tendríamos un infinito equivalente (que se alcanza igual de rápido), ya que, $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+5x}{4x^2}=1$ y por consiguiente el grado de $(4x^2+5x)^{\frac{1}{2}}$ sería el mismo que el de $(4x^2)^{\frac{1}{2}}$. En definitiva el polinomio de arriba tiene grado 1.

- Si procedemos de igual forma con el denominador, resulta que tiene grado 2 (se deja al alumno realizar la demostración.)

Si aplicamos el criterio tendríamos que como grad(p(x)) < grad(q(x)) directamente tendremos que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+\sqrt{x^4-5}} = 0$.
A pesar de la simpleza y facilidad del argumento vamos a proceder a demostrar algebraicamente el por qué de la validez de los resultados obtenidos. En este caso, el algoritmo es similar, lo que si debemos tener en cuenta es que trabajamos con expresiones radicales y éstas son un poco más complicadas de operar que los polinomios habituales.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+\sqrt{x^4-5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x}\right)}}{3x+\sqrt{x^4\left(1-\frac{5}{x^4}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(4+\frac{5}{x}\right)}}{3x+\sqrt{x^4}\sqrt{\left(1-\frac{5}{x^4}\right)}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(4+\frac{5}{x}\right)}}{3x+\sqrt{x^4}\sqrt{\left(1-\frac{5}{x^4}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\left(4+\frac{5}{x}\right)}}{3x+x^2\sqrt{\left(1-\frac{5}{x^4}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\left(4+\frac{5}{x}\right)}}{x^2\left(\frac{3}{x}+\sqrt{\left(1-\frac{5}{x^4}\right)}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\left(4+\frac{5}{x}\right)}}{x^2\left(\frac{3}{x}+\sqrt{\left(1-\frac{5}{x^4}\right)}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\frac{\sqrt{\left(4+\frac{5}{x}\right)}}{\left(\frac{3}{x}+\sqrt{\left(1-\frac{5}{x^4}\right)}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\frac{2}{1} = 0$$

**Ejemplo 5.8**

Hallar $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{-x^2-2x+1}$
Realizamos la sustitución directa con la cautela de siempre $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{-x^2-2x+1} = \frac{\infty}{\infty}$
Pero en este caso tenemos funciones que no podemos tratar algebraicamente (en este caso la exponencial) por lo que no nos sirve ni el criterio ni el sacar factor común. Tendremos que recurrir a la comparación de infinitos y al álgebra de límites.
En primer lugar, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{-x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{-x^2-2x+1} - \frac{1}{-x^2-2x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{-x^2-2x+1} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-x^2-2x+1}$
Analizamos cada sumando por separado:

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{-x^2-2x+1} = \frac{\infty}{\infty}$ Y como ya sabemos $\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2-2x+1}{-x^2} = 1$ significa que cuando $x \to +\infty$ ambas funciones llegan igual de rápido a alcanzar el infinito, me quedo con la más sencilla de las dos $-x^2$. Así pues, por comparación de infinitos $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{-x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{-x^2} = -\infty$. La última igualdad se razona de la siguiente manera: la función exponencial alcanza mucho más rápido el infinito que $x^2$, por lo que el límite del cociente es $\infty$ y sacando fuera el signo menos del $-x^2$ obtenemos $-\infty$.

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-x^2} = 0$ (utilizando los infinitos equivalentes del apartado anterior.)

Finalmente por el álgebra de límites $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^2-2x+1} = -\infty - 0 = -\infty$.

### 5.2.4 Indeterminación $\infty-\infty$

La estrategia para resolver este tipo de indeterminaciones es intentar reescribir la función de tal manera que se transforme en una del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

a) Si lo que se tienen son fracciones algebraicas, basta con aplicar el mínimo común múltiplo.

b) Si tenemos sumas o restas de radicales, multiplicamos y dividimos por el conjugado.

**Ejemplo 5.9**

Calcular $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x+3}-\frac{x+2}{2}$. Realizaremos la sustitución directa (recuérdese que esto es simplemente una manera de identificar la indeterminación, pero que matemáticamente no es correcto sumar,restar... con el infinito). Obtenemos $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x+3}-\frac{x+2}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x+3}-\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{2}=\infty-\infty$.

Realizamos el mcm:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x+3}-\frac{x+2}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x^2-1)-(x+2)(x+3)}{2(x+3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2-x^2-3x-2x-6}{2x+6}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2-x^2-3x-2x-6}{2x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x-8}{2x+6}$$

El último límite ya es del archiconocido tipo $\frac{\infty}{\infty}$ y se resuelve rápidamente aplicando el criterio. El resultado $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x+3}-\frac{x+2}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x-8}{2x+6}=+\infty$

**Ejemplo 5.10**

Calcular $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}$.

Por sustitución directa tenemos que $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=\infty-\infty$. Procedemos a intentar reescribir la función de forma equivalente. Dicha transformación no puede alterar la expresión inicial, porque de lo contrario, el límite que estaríamos calculando sería diferente. Como opción (que no siempre funciona) multiplicaremos y dividiremos por el conjugado.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1})}$$

En el numerador observamos una identidad notable del tipo $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3-x+1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}$$

Aplicamos el álgebra de límites y nos queda averiguar el valor de $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}$. Por sustitución directa tenemos que $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=\infty+\infty$ y esto último NO ES UNA INDETERMINACIÓN ya que ambos son positivos (el infinito) luego tenemos una cantidad positiva *muy grande* a la que le sumamos otra positiva *igualmente grande*. Por lo que el resultado $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=+\infty$. Concluimos que $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}=0$.

El ejemplo anterior nos ha planteado una interesante pregunta que merece un poco de atención para comprender mejor el por qué de las INDETERMINACIONES. Hemos dicho que $\infty+\infty=+\infty$ (¡entiéndase lo último como una manera de escribir para expresar una idea!) **NO** es una indeterminación pero $\infty-\infty$ **SÍ** lo es. Arrojemos algo de luz al asunto, puesto que el objetivo de este curso es que empieces a entender que en matemáticas las cosas no ocurren porque sí.

Todo viene por el hecho de que infinito es un concepto que involucra una cantidad inimaginable en magnitud. Tanto es así, que algunos consideran el infinito *aquella cantidad tal que si le restamos cualquier otra por grande que sea, la diferencia, sigue siendo infinita.* Pero ante esto, nos surge otra cuestión, ¿existen infinitos más grande que otros? La respuesta es que sí, y de ello debemos buena parte a matemáticos del siglo XX como Cantor. Por tanto, si nuestras funciones alcanzasen el infinito al mismo tiempo (van igual de rápido) entonces $\infty-\infty=k$ con $k\in\mathbb{R}$, si el primer término va mucho más deprisa que el segundo $\infty-\infty=+\infty$ (estamos comparando infinitos) y si es el sustraendo es el que alcanza el infinito antes, entonces $\infty-\infty=-\infty$. Por ello es indeterminado, porque dependiendo de las funciones pueden ocurrir tres situaciones diferentes.
Esto último es tremendamente interesante para resolver límites directamente como el siguiente:

**Ejemplo 5.11**

Calcular $\lim_{x\to+\infty} e^{x^2}-\sqrt{x}$.
Antes de ponernos a realizar operaciones algebraicas con más o menos éxito, debemos pensar un poco y reflexionar sobre el límite que nos presentan (es un buen consejo).
Por sustitución directa tenemos que $\lim_{x\to+\infty} e^{x^2}-\sqrt{x}=\infty-\infty$ que es una indeterminación. Pero la función $e^{x^2}$ va muchísimo más rápido al infinito que $\sqrt{x}$, la cual, es más lenta. Por comparación de infinitos, el primero es superior al segundo, por lo que $\lim_{x\to+\infty} e^{x^2}-\sqrt{x}=+\infty$

## Ejercicios

1. La famosa fórmula de Einstein $M=\frac{mc}{\sqrt{c^2-v^2}}$ expresa el valor de la masa $M$ de un cuerpo en función de su velocidad v, siendo c la velocidad de la luz $(300000km/s)$. Calcular el valor de la masa de un cuerpo cuando adquiere una velocidad que se aproxima a la de la luz c. A la vista de ese resultado, ¿Qué conclusiones puedes extraer acerca de la energía necesaria para moverlo? (*Indicación: recuerda la famosa fórmula de Einstein* $E=m\cdot c^2$).

2. Francisco y María tienen una piscina en su jardín y ahora que ha acabado el verano tienen que vaciarla. Abren el desagüe y la piscina comienza a vaciarse según la función $v(t)=\frac{\sqrt{t+3}-2}{t-1}$ donde t es el tiempo de vaciado en horas, y v(t) es el volumen de agua expresado en $m^3$.

   a) ¿Cuándo se vaciará la piscina por completo?
   b) Aproximadamente ¿cuál será el volumen de la piscina cuando t=1 hora?
   c) ¿Cuál será el volumen de la piscina con el transcurrir del tiempo? ¿Contradice esto la respuesta obtenida en el primera apartado? Argumentar.

3. El servicio de neumología del hospital de Jerez va a implantar un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo el tiempo de espera para ser intervenido. Se prevé que a partir de ahora la

siguiente función, P(t) indicará en cada momento t, en meses, el porcentaje de pacientes que podrán ser operados sin necesidad de entrar en lista de espera. $P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 45 & si \quad 0 \leq t \leq 10 \\ \frac{38t-100}{0.4t} & si \quad t > 10 \end{cases}$

a) ¿Cuál será el porcentaje aproximado de pacientes que podrán ser operados en el décimo mes de implantación? ¿Y exactamente? ¿Qué explicación podrías dar a raíz de los resultados?

b) Con el devenir del tiempo, ¿a cuántas personas podrá atender este sistema?

c) ¿Permitirá este sistema alcanzar el desafío de que ningún paciente tenga que esperar para operarse?

4. **Selectividad 2002** Sea x, en euros, el precio de venta del litro de aceite de oliva virgen extra. Sea $f(x) = 2 - \frac{4}{x+1}$ con $x \geq 0$, la función que representa el balance económico en miles de euros, de una empresa agrícola.

   a) ¿A partir de qué precio de venta del litro de aceite empieza esta empresa a tener beneficios?

   b) ¿Si se aumentase indefinidamente el precio del aceite, aumentarían cada vez más las ganancias?

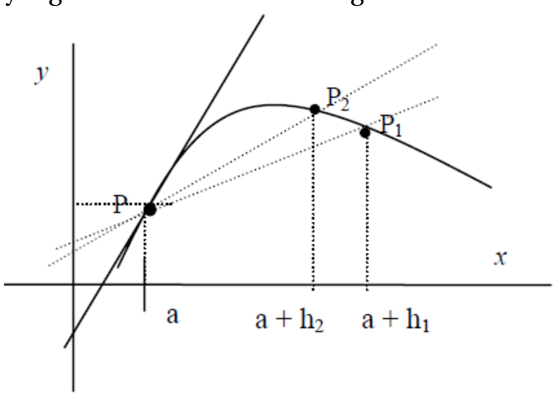
# Problemas Finales

1. Mezclamos un litro de pintura blanca con un litro de pintura azul. ¿Qué proporción de pintura blanca tendremos en la mezcla? Si añadimos, otro litro de pintura azul, ¿qué proporción de pintura blanca tendremos? Si añadimos, 40 litros más, ¿cuál es la nueva proporción de pintura blanca? Si seguimos añadiendo pintura azul indefinidamente, ¿a qué tiende la proporción de pintura blanca en la mezcla? ¿Llega algún momento en que la proporción de pintura blanca sea exactamente cero?

2. Tomamos el intervalo [0,1] y lo dividimos en dos partes iguales. Quitamos el subintervalo de la derecha. Con el de la izquierda repetimos la misma operación. Si continuamos con este proceso indefinidamente, ¿qué conjunto obtenemos al final del proceso? ¿Cuál sería la longitud del intervalo en la iteración 50?

3. Tomamos el intervalo [0,1]. Lo dividimos en tres partes iguales, quitamos el intervalo central. En cada uno de los intervalos que tenemos repetimos la misma operación: dividimos en tres subintervalos y quitamos el central. Si repetimos indefinidamente la operación, ¿qué conjunto se obtiene?

4. Las rectas que pasan por los puntos $P_1$ y P y $P_2$ y P están indicadas con líneas punteadas y representan dos rectas secantes a la gráfica de una cierta función, mientras que la recta de trazo continua representa la recta tangente a la gráfica de la función en el punto P, de abscisa a. Indicar y argumentar cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:




   a) Las pendientes de las rectas secantes tienden a la pendiente de la recta tangente cuando h tiende a cero.

   b) El límite de las pendientes de las rectas secantes es la pendiente de la recta tangente cuando h tiende a cero.

   c) El límite de las pendientes de las rectas secantes tiende a la pendiente de la recta tangente cuando h tiende a cero.

5. Una bola de billar está suspendida por un hilo desde el punto A, a 100 cm de la pared. Se aparta la bola de la vertical, 20 cm y se suelta. Ella oscila, y la distancia de la bola a la pared varía en función del tiempo transcurrido hasta que se queda quieta nuevamente.

   a) Esbozar la gráfica de la distancia de la bola a la pared en función del tiempo.

   b) Elegir entre los siguientes números, aquel que consideres como límite de la distancia de la bola a la pared, en función del tiempo. Justifica la respuesta.

      *a)* 70 cm
      *b)* 80 cm
      *c)* 90 cm
      *d)* 100 cm
      *e)* 110 cm
      *f)* 120 cm
      *g)* 130 cm
      *h)* Otro:

   c) ¿En algún momento ocurre que la distancia de la bola a la pared es mayor que el valor del límite dado en a? ¿Y menor?

   d) ¿En algún momento la distancia de la bola de billar a la pared es igual que el valor del límite dado en a)? ¿Contradice esto la idea de límite?

6. Un conductor observa cada cierto tiempo los km que lleva recorridos y anota lo siguiente:

| Hora (h) | 9:00 | 9:15 | 9:45 | 9:57 |
|---|---|---|---|---|
| Kilómetros | 291,59 | 308,02 | 342,22 | 356,41 |

A las 10:00 llega a un pueblo a 360 km del punto de partida. ¿Qué velocidad llevaba? La siguiente tabla te ayudará a resolver el problema. Complétala:

| h (horas) | Tiempo transcurrido entre h y 10:00 (en minutos) | Espacio recorrido entre h y 10:00 | Velocidad media entre h y 10:00 (en km/h) |
|---|---|---|---|
| | | | |

¿A qué valor se aproximan las velocidades medias cuando el intervalo tiempo se hace cada vez menor? ¿Qué velocidad llevaba el conductor a las 10:00h ? ¿Por qué?

7. Aplicar la definición formal de límite de una función para encontrar un $\delta > 0$, si $\lim_{x\to 5} \frac{x-1}{4} = 1$ y $\varepsilon = 0.0025$.

*Sol:* $\delta < 0.01$

8. Intuir el valor del límite de $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ para $x \to 3$ calculando previamente los límites laterales con una tabla de valores.

*Sol:* 6

9. Emplear la definición $\varepsilon - \delta$ para probar que $\lim_{x\to 1} \frac{1}{2+\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$. Añadir la ilustración gráfica (puedes ayudarte del geogebra). ¿Alcanza la función en algún valor de x, el límite?

10. Justifica e ilustra **gráficamente** si el siguiente razonamiento es correcto o no. Para ello, debes recurrir a la definición de límite. *Si tomamos una función f, para demostrar que el valor de* $\lim_{x\to 1} f(x) = L$ *basta con tomar un único entorno de L, por ejemplo de radio* $\varepsilon = 2$ $(L-2 \leq f(x) \leq L+2)$*, y ver que para todas las aproximaciones de* $x = 1$ *siendo* $x \neq 1$*,con error menor o igual a* $\delta = 0.005$ $(0.995 \leq x \leq 1.005)$*, sus imágenes por f se acercan tanto como queramos a L.*

11. ¿Es el siguiente teorema verdadero o falso? Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y que $\lim_{y\to b} g(y) = c$ entonces $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

12. Proponer, si existen, dos funciones $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cada una de las cuales cumpla las dos condiciones siguientes:

    a) El límite de f y g cuando x tiende a 2 sea 5.
    b) f supere el valor del límite y g no lo supere.

    Explicar en cada caso, tanto si tales funciones existen como si no.

13. Dibujar la gráfica de una función que verifique las siguientes condiciones:

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

b) $0 \notin Dom(f)$

c) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 1$

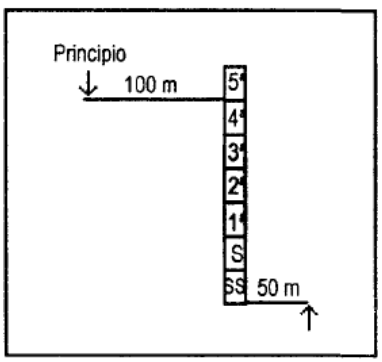
d) $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -1$

e) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

f) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

14. En unos grandes almacenes nos encontramos a 100 m del ascensor en la 5ª planta. Deseamos bajar al segundo sótano a 50 m del ascensor en sentido contrario. Vamos a describir la relación que existe entre la altura a la que nos encontramos, y, la situación horizontal, x, considerando como origen la situación inicial en la 5ª planta (indicación: la distancia entre plantas es de 5 m). Construye una tabla de valores de la función que surge de la situación anterior:

| | |
|---|---|
| x (metros en horizontal) | |
| y (metros en vertical ) | |




*a*) ¿Qué ocurre cuando $x = 100$?

*b*) Construya la gráfica de la función y deduce la expresión algebraica de la misma.

*c*) ¿Tiene límite la función en x=100? ¿Por qué? Ilustra tu razonamiento con la definición de límite o con alguno de los resultados estudiados en la unidad.

*d*) Utilizando un razonamiento similar al anterior, justifica si una función puede tener o no límites distintos en el mismo punto.

15. Dibujar una función que cumpla que $f(x) < 0$ si $x > 3$ y $f(x) > 0$ cuando $x < 3$. Si además existe, $lim_{x\to 3} f(x)$ ¿Cuánto vale? Razona tu respuesta.

16. Los bancos ofrecen la posibilidad a sus clientes de invertir dinero a plazo fijo devolviéndoles la cantidad inicial, más un interés. Consideremos que ese interés es de tipo compuesto. La fórmula que nos da la cantidad a devolver sería $S = P(1+i)^n$ donde:

- *S="cantidad o valor futuro una vez acabado el período de contratación."*
- *i="tasa de interés por período de capitalización."*
- *n="número total de períodos de capitalización"*

Normalmente los bancos te dan el i, en% anual, es decir, el período de capitalización es como mínimo un año, y si retiras un sólo euro antes de que acabe el contrato, no recibes nada más que la cantidad inicial que invertiste. Si estuviésemos interesados en conocer a cuánto asciende nuestra inversión en el primer mes simplemente debemos calcular el% mensual que nos ofrece el banco con la fórmula $i_m = \frac{i}{12}$ y sustituir en la expresión del principio.

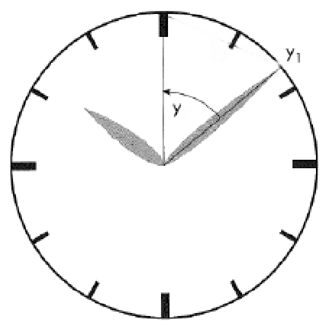
a) Si he invertido en el banco 1000 €y el banco me ofrece un 2% anual. ¿Cuánto tengo en la libreta el primer mes? ¿Y el quinto?

b) Cual será el % trimestral que ofrece dicho banco.

c) Con el mismo interés anual, calcular cuánto dinero tendría a la semana de haber hecho la inversión.

d) ¿Se te ocurre un método para conocer en cada instante de tiempo el valor de la inversión?

17. Un reloj analógico como el de la imagen, tiene un diámetro de 20 cm. Observamos el ángulo que forma la aguja del minutero con la dirección 6h-12h a lo largo del tiempo.




a) Si en el instante inicial marcaba las $15:00$. Esbozar la gráfica del ángulo en función del tiempo hasta las $18:00$. Donde t es el tiempo en minutos.

b) Hallar mediante la gráfica $\lim_{t\to 45} f(t)$, $\lim_{t\to 120^+} f(t)$, $\lim_{t\to 120^-} f(t)$ y $\lim_{t\to 120} f(t)$. ¿Qué le ocurre al reloj a las dos horas?

c) Hallar $\lim_{t\to +\infty} f(t)$ y argumenta si dicho resultado es válido o no, basándote en la fenomenología que estamos estudiando.

18. Se tiene una función g tal que $g(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ y además $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$:

a) Determine una función f tal que $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 1$

b) Determine una función h tal que $\lim_{x\to 0} f(x)h(x) = -3$

c) Determine una función p tal que $\lim_{x\to 0} p(x)f(x)g(x) = \nexists$.

19. Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = 3$
2. $\lim_{x\to +\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2+4}} = 5$
3. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$
4. $\lim_{x\to -2} \frac{x^2}{x^2+x-2} = \nexists$
5. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+4x} - x = 2$
6. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{9x^2+1} - 3x = 0$
7. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^4-3x}{5-2x} = +\infty$
8. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}} = 1$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \frac{1}{6}$
10. $\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{a^2+1}}{x-a} = \frac{-2a}{(a^2+1)^2}$
11. $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$
12. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
13. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}$
14. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \frac{4}{3}$
15. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{2|x-2|} = \nexists$
16. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = 1$
17. $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2x+2h}-\sqrt{2x}}{h} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$
18. $\lim_{h\to 0} \frac{1+h^{\frac{1}{h-1}}}{h} = \nexists$

20. **(Selectividad 2009 Andalucía)**. Sea $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x}+x}{x}$. Hallar $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

*Sol:* 2

21. Ordenador de menor a mayor los órdenes de los siguiente inifinitos:

$$\log_2(x), \sqrt{x}, x^2, 3x^5, 1.5^x, 4^x$$

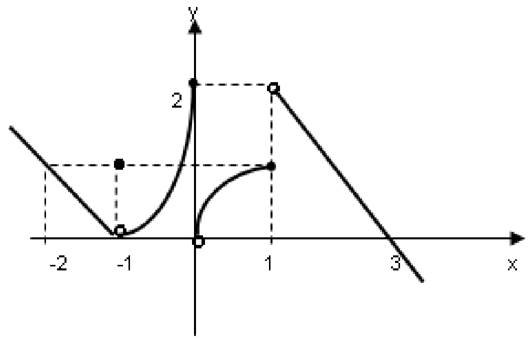
Teniendo en cuenta el resultado anterior calcular: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2(x)}{\sqrt{x}}$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5}{x^2}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1.5^x}$

22. Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to+\infty} x^2 + \sqrt[3]{2x+1} = +\infty$
2. $\lim_{x\to-\infty} 3^x - 2^x = 0$
3. $\lim_{x\to-\infty} 2^x - x^2 = -\infty$
4. $\lim_{x\to+\infty} 5^x - \sqrt[3]{x^8-2} = +\infty$
5. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x^3-x}}{\sqrt{x^2+x-2}} = +\infty$
6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{x+1} = 1$
7. $\lim_{x\to+\infty} \log(x+1) - \log(x) = 0$
8. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-2}{x+3} - \frac{x^2+1}{x} = +\infty$
9. $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x<0 \\ \frac{2x^2-6x}{3x^2-9x} & si \quad 0<x<3 \\ \frac{2}{3} & si \quad x=3 \end{cases} = \nexists$
10. $\lim_{x\to-2} \frac{x+1}{x^2+2x} = \nexists$
11. $\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} 1-\frac{|x-1|}{x^2-9} & si \quad x\neq 3 \\ 2 & si \quad x=3 \end{cases} = \nexists$
12. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = +\infty$
13. $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1+x}} & si \quad -1\le x<0 \\ x^2+1 & si \quad x\ge 0 \end{cases} = \nexists$
14. $\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+7x^2+14x+9}{x^2+2x-3} & si \quad x\neq 1 \\ 0 & si \quad x=1 \end{cases} = \nexists$
15. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2+3e^x}{\sqrt{2+3x^2}} = +\infty$
16. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & si \quad x<0 \\ x & si \quad 0\le x<1 \\ \sqrt[5]{x} & si \quad x\ge 1 \end{cases} = 0$
17. $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+e^{\frac{1}{x}})} & si \quad x\neq 0 \\ \frac{1}{2} & si \quad x=0 \end{cases} = \nexists$
18. $\lim_{x\to+\infty} \log(x) - \sin(x) = +\infty$
19. $\lim_{x\to-1} cos\left(\frac{x^2-1}{|x^2-1|}\right) = \cos(-1)$
20. $\lim_{x\to 1} \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x^2-x} = \nexists$

23. Emplear la definición de límite y acompañarla de una ilustración, para probar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = E(x)$ no tiene límite (ni finito ni infinito) en $x = -1$. *Indicación: E(x) significa la parte entera de x. Puedes ayudarte del geogebra para ver la gráfica.*

24. A partir de la gráfica adjunta, calcular:




a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

b) $\lim_{x\to-1^+} f(x) =$

c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$

d) $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$

e) $\lim_{x\to-1^+} f(x) =$

f) $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$

g) $\lim_{x\to-1^-} f(x) =$

h) $\lim_{x\to 1} f(x) =$

i) $\lim_{x\to 0} f(x) =$

j) $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

25. Hallar el valor de a para que:

a) $\lim_{x\to 3} \frac{ax^2-9a}{x^2-2x-3} = 1$ $Sol$= $a = \frac{2}{3}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+ax+1} - x = 2$ $Sol$= $a = 4$

# Bibliografía


1. Benítez, F. (2012). Apuntes de Cálculo Infinitesimal I. Apuntes de la Asignatura Cálculo Infinitesimal I. Grado en Matemáticas, Puerto Real.
2. Blázquez, S. & Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *8*(30), 67–83.
3. Blázquez, S. & Ortega del Rincón, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula,10*, 119–135.
4. Colera, J., Oliveira, M., García, R., & Santaella, E. (2008). *Matemáticas II*. Anaya.
5. Colombano, V. & Rodríguez, M. (2010). Propuesta para superar algunos modelos intuitivos no apropiados de límite funcional. *Revista de Educación Matemática*.
6. de la Barrera Mayoral, D. (2013). Experiencias docentes competencias en límites: esquemas conceptuales y resolución de ejercicios competences in limits: conceptual frameworks and exercises solving.
7. Londoño, N., Del Socorro Navarro, P., & Yatzil, A. Indagando sobre el límite de funciones desde diferentes registros de representación. *El Cálculo y su Enseñanza*, 91–106. Septiembre 2013-Septiembre-2014. Cinvestav-IPN.
8. Medina, A. C. (2017). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, (9), 91–106. http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/5622.
9. Melo, L. M. G. & Portillo, Y. M. P. (2013). Límite de funciones, sistemas de representación y estándares de calidad: una metodología de análisis de textos escolares. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, (9), 26–38.
10. Pérez, F. J. Cálculo Diferencial e Integral de Funciones de una Variable. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Granada, Granada.
11. Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151–169.
12. Torrejón, M. J. (2016). Propuesta de mejora sobre la didácctica del límite de una función en el aula. Master's thesis, Universidad de Cádiz, Puerto Real.